

Batch PDF

Batch PDF Me

Batch PDF

Batch PDF Me

Statics

Faculty of Science

Ain Shams University

Department of Physical Sciences

Applied Mathematics

1st- Year , Academic of 1989

الباب الأول

Vector Algebra. جبر المتجهات

1 تعريف definition

في العلوم الرياضية والبيعية يتعاملنا نرسله سه كميات : كميات قياسية (غير متجهة) Scalars وكميات متجهة نفس المتجهات Vectors.

وتدفع الكميات القياسية بأن الكميات التي يمكن تمثيلها تمديدا تماما بمتجهة متداها
نقل كل الزمان ودرجة الحرارة وكتلة والسفل والطاقة والطول والحجم والسرعة.

هذه الكميات لا تتغير بتغير المتغير وتخضع للعمليات الحسابية والجبرية العادية
بالضرب القاري أي أنها تخضع لقوانين الجبر القاري.

أما الكميات المتجهة فإنها لا تخضع للعمليات الحسابية العادية تماما بل هي متجهة لها اتجاه
مثل السرعة والعجلة والقوة وغيرها. فكل المتجه له مقدار واتجاه فانه المتجهات.

2 التمثيل الهندسي للمتجه: geometrical representation of a vector

نقار للمتجه هندسية للمتجه للمتجه والمتجه فانه يمثل
بمتجه مثل ab حيث a هو مقدار المتجه و b هو اتجاهه.



نفس القيمة لمقدار المتجه (المقدار) تمثيل المتجه modulus

المتجه a نفس بداية المتجه a ونقطة المتجه
يرمز للمتجه بالرمز ab ، a ، ab

أما ab نيل للمتجه المتجه نقط

$$ab = |ab| = a$$

وتسمى المتجه بجزء واحد يقال له F شدة مقدار المتجه هو F

3 تعريف

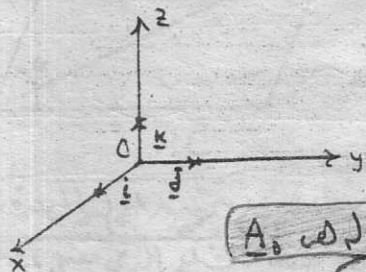
أ) يقال للمتجهين A و B متساويين إذا كانا متساويين في المقدار والاتجاه واحد والمقدار المتساوي
أي أنه إذا $A = B$ ، $A \perp B$ ، $A \parallel B$ ، $A = B$ ، $A = B$ ، $A = B$

أما إذا كانا متنازيين ولكن في اتجاهين متضادين والواحدان المتضادين أي إذا كان $A = B$ ، $A \uparrow \downarrow B$ فإنه $A = -B$

(٢) حاصل ضرب كمية متجهة في كمية قياسية هو متجه جديد يوازي المتجه الأصلي وله نفس اتجاه المتجه الأصلي أو الاتجاه المضاد له حسب كونه كمية لقياسية موجبة أو سالبة. مقدار المتجه الناتج يساوي حاصل ضرب مقدار المتجه الأصلي في الكمية القياسية. فنقول mA (حيث m كمية قياسية) هو متجه يوازي A ومقداره هو m مرة مقدار A اتجاه A .

(٣) المتجه الذي مقداره الوحدة واتجاهه يلعبه للاتجاهات يسمى بالـ unit vector لهذا المتجه.

(٤) الوحدات المتجهة الأساسية هي وحدات نطقية في المحاور لمحورين للمحاور الكارتيكية $Oxyz$ ونشير إليها كالتالي:



$\underline{i}$ وحدة المتجه في الاتجاه الموجب لمحور x

$\underline{j}$ وحدة المتجه في الاتجاه الموجب لمحور y

$\underline{k}$ وحدة المتجه في الاتجاه الموجب لمحور z

ويعبر عنه إذا كان له لدينا متجه A ونرضاه أنه وحدة المتجه له A_0

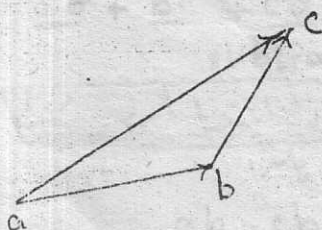
فإنه يمكن كتابته بالصيغة: $A = A A_0$ حسب تعريف (٢)

وإذا كان B هو متجه اتجاهه هو الاتجاه الموجب للمحور x فإنه يكتب بالصيغة: $B = B \underline{i}$ وهكذا

(٥) النسبة بين متجهين متنازيين كمية قياسية.

(٦) متجه الوحدة عليه حركة قياسية تساوي حاصل ضرب متجهين لقياسية في صيغة تمام الزاوية بين المتجه والحد المربع.

جمع متجهين: addition of two vectors.



لكن نوضح جميع كميته بمتجهين فنضربه كنهما ما ثم انتقل من a إلى b ثم انتقل من b إلى c . يمكن القول لا لهذا الانتقال بالانتقال مباشرة من a إلى c ومثل ذلك كالتالي:

$$\underline{ab} + \underline{bc} = \underline{ac}$$

$$(ab + bc > ac) \text{ يلاحظ أنه}$$

دعونا نأخذ حاصل جمع متجهي $\underline{A}$ و $\underline{B}$ هو متجه $\underline{C}$. ركب هكذا :

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

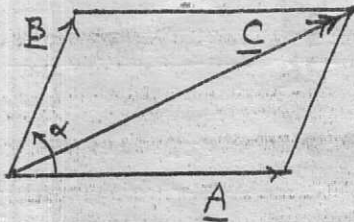
حيث يمثل حاصل الجمع المتجه الذي يعبر به بداية $\underline{A}$ ونقطة $\underline{B}$ إذا كان $\underline{B}$ يبدأ من نقطة $\underline{A}$ كما في الشكل . رئيس المتجه $\underline{C}$ def

التيه بالكل الجاد تمثلت المتجه

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

ورافعي أنه يمكن جمع متجهين بطريقة أخرى وهي طريقة متوازي أضلاع المتجهات

وذلك بأنه نرسم من نقطة ما ضلعيه متجاوريين متساويين للمتجهين متوازيين وانماهما ثم نكمل متوازي الأضلاع فيكونه طول الخارج هو لهذه الثلاثة متساوي لحاصل جمع المتجهين .



$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

حيث α الزاوية بين المتجهين .

أما حاصل جمع عدة متجهات فإننا نحصل عليه بطبيعة تامة جمع متجهيه على التوالي عدة مرات

وهو ثم نأخذ حاصل جمع عدة متجهات له متجه يمثل له نفس الضلع الذي يمثل الحاصل

المتجه أضلاعه المتتاليه واتجاهاته المتجهات

المراد جمعها بأفرد في ترتيب درسي راد

ويؤخذ الضلع الذي يمثل الضلع في اتجاه المضاد

رئيس الضلع الناتج من ضلع المتجهات

ولم ذلك نأخذ أضلاع المتجهات فيقل من نفسه

نقتطع ذلك أنه حاصل الجمع بالمتجهات

متساوية لكل الجاد

$$\underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} + \underline{de} = \underline{ae}$$

subtraction of two vectors.

5 طرح متجهيه :

يمكن تحويل عملية طرح متجهيه إلى عملية جمع متجهيه إذا اعتبرنا أنه لو كان

السالب أمام المتجه يعني عكس اتجاهه . ولتذكر أنه :

$$\underline{ab} - \underline{cb} = \underline{ab} + (-\underline{cb}) = \underline{ab} + \underline{bc}$$

(٤)

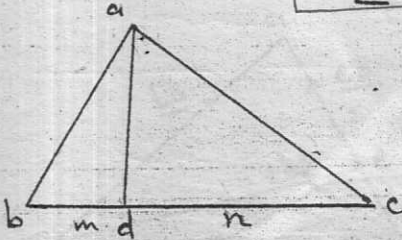
نظرية: ٦

إذا كانت نقطة d تنتمي الى ضلع bc من المثلث abc سداً داخلية $m:n$

$$m \underline{ac} + n \underline{ab} = (m+n) \underline{ad}$$

ثباته:

البرهان:



$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= m \underline{ac} + n \underline{ab} \\ &= m (\underline{ad} + \underline{dc}) + n (\underline{ad} + \underline{db}) \\ &= (m+n) \underline{ad} + m \underline{dc} + n \underline{db} \end{aligned}$$

ولكنه من الفرض نعلم أنه:

$$\frac{bd}{dc} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore m \underline{dc} = n \underline{bd}$$

$$\therefore m \underline{dc} - n \underline{bd} = 0$$

$$\therefore m \underline{dc} + n \underline{db} = 0$$

وبالتعويض نأخذ منه أنه:

$$\text{L.H.S.} = (m+n) \underline{ad} = \text{R.H.S.}$$

نتيجة: إذا كانت $m=n$ أي إذا كانت d نقطة bc ثابته:

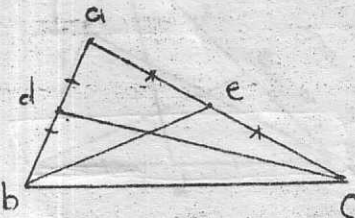
$$\underline{ab} + \underline{ac} = 2 \underline{ad}$$

نظرية: ٧

مثال (١) abc مثلث a فيه e نقطة ac ، d نقطة ab اثبت أنه:

$$\underline{be} + \underline{dc} = \frac{3}{2} \underline{bc}$$

البرهان:



$$\therefore 2 \underline{be} = \underline{ba} + \underline{bc}$$

$$\therefore 2 \underline{dc} = \underline{ac} + \underline{bc}$$

$$\therefore \underline{be} + \underline{dc} = \frac{1}{2} (\underline{ba} + \underline{ac} + 2 \underline{bc})$$

بالجمع

$$\therefore \underline{be} + \underline{dc} = \frac{1}{2} (\underline{bc} + 2 \underline{bc})$$

$$= \frac{3}{2} \underline{bc}$$

تم الحل

(o)

مثال (٤) :

ثلاث قوى متزنة بالقطر بمتحدة $\underline{ba}$ ، $\underline{ca}$ ، $2\underline{bc}$ تؤثر في أضلاع مثلث abc . أثبت أنه يصل إلى حالة التوازن $6\underline{de}$ حيث d منتصف bc ، e نقطة على ca بحيث يكون $ce = \frac{1}{3}ca$

الحل :

نأخذ الشكل البارز وافرض أنه :

$$2\underline{bc} + \underline{ba} = 3\underline{be}$$

$$\therefore 2\underline{bc} + \underline{ca} + \underline{ba} =$$

$$= 3\underline{be} + \underline{ca}$$

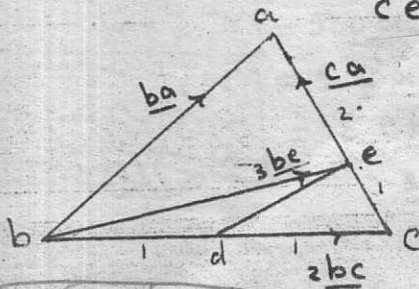
$$= 3\underline{be} + 3\underline{ce}$$

$$= 3(\underline{be} + \underline{ce})$$

$$= 6\underline{de}$$

لأنه d منتصف bc

يصل إلى التوازن

بالمثل
الطرف ca 

و نلاحظ من ذلك أنه إذا كانت
القوى المتزنة متزنة
في الزوايا وفي الموضع
فقط وإذا كانت متزنة
في الموضع فإتساخ متزنة
بذلك لا غير

مثال (٥) :

ثلاث قوى متزنة بمتحدة $\underline{bc}$ ، $\underline{ca}$ ، $\underline{ab}$ تؤثر في أضلاع مثلث abc . أثبت أنه يصل إلى حالة التوازن $8\underline{cf}$ حيث f نقطة على ab بحيث يكون $\frac{af}{fb} = \frac{3}{5}$

$$8\underline{cf} = \underline{bc} + 5\underline{ca} + 2\underline{da} + 5\underline{eb}$$

الحل :

$$R.H.S. = \underline{bc} + 5\underline{ca} + 2\underline{da} + 5\underline{eb}$$

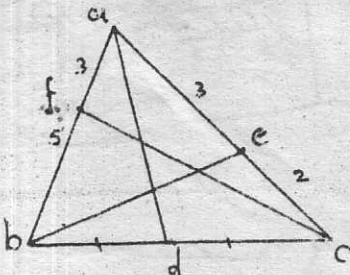
$$= 5\underline{ca} + \underline{bc} + (\underline{ca} + \underline{ba}) + (3\underline{cb} + 2\underline{ab})$$

لأنه :

$$5\underline{eb} = 3\underline{cb} + 2\underline{ab}$$

$$2\underline{da} = \underline{ca} + \underline{ba}$$

بالمثل الطريقة السابقة



(7)

$$\therefore R.H.S. = 5ca + (\underline{bc} + 3cb) + (\underline{ba} + 2ab) + \underline{ca}$$

رابطه منطوقه
مستقلات را در
قالبه را با ابعاد
بهمه مقایسه

$$\begin{aligned} &= 5ca + 2cb + \underline{ab} + \underline{ca} \\ &= 5ca + 2cb + (\underline{ca} + \underline{ab}) \\ &= 5ca + 2cb + \underline{cb} \\ &= 5ca + 3cb \\ &= 8cb = L.H.S. \end{aligned}$$

تجميع المتطابق التي
ينتج على متجه يقيس
في بعدي المتجهين

مجموع

لأنه f تقسم ab بنسبة $3:5$

مثال (11):

$$\checkmark \quad l \underline{oa} + m \underline{ob} + n \underline{oc} = 0$$

أثبت أنه إذا كان:

$l + m + n = 0$ حيث l, m, n كميات كياسية
فإنه ينتج (نقطة) مشتركة a, b, c تقع على - نقطة واحدة.

الحل:

من الفرضية نجد أنه:

$$l \underline{oa} + m \underline{ob} + n \underline{oc} = 0$$

$$\therefore l(\underline{ob} + \underline{ba}) + m \underline{ob} + n(\underline{ob} + \underline{bc})$$

$$\therefore (l + m + n) \underline{ob} + l \underline{ba} + n \underline{bc} = 0$$

$$\therefore 0 + l \underline{ba} + n \underline{bc} = 0$$

$$\therefore \underline{ba} = -\frac{n}{l} \underline{bc}$$

أي أنه المتجه $\underline{ba}$ و $\underline{bc}$ متوازيين

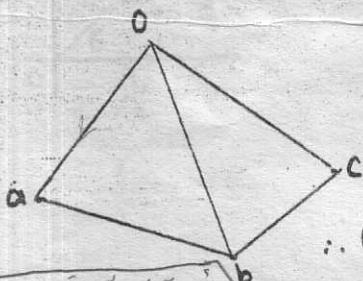
وبذلك يتضح أن a, b, c تقع على - نقطة واحدة

$\therefore$ فهي نقطة واحدة.

وهي ذلك فإن a, b, c يجب أن تقع على -

نقطة واحدة

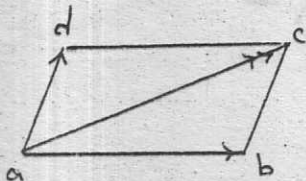
مجموع



أثبتت قاسم
المتجهين في فضاء متجهي
بالاستخدام من المتجهات
القواسية التي تكون بلازم
يمكن أن نعيد خواص المتجهات

resolution of a vector.

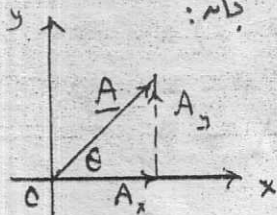
۸ تحلیل بنیہ !



بیکه تئیل بجه معلوم ف انما کیه معلومیه بر رسم سترانه
اضلاع قطعی که البته المار تحلیل در ضلعاه ایجاویه
بر اثرایه ف انما کیه معلومیه فکوره ضلعاه سترانه

الذم المباح منكم لتركيب التوبة في الدنيا عليه لعونه

بكتبة قالبا تانماج بالا قيل يتبه معلوم في انما هي معلوم بتعدي .
 رن هذه الحان ناسه ستوانس الاصلح يصح تميز .

[illegible]

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} \quad \dots (1)$$

رد افعی است:

$$A_x = A \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

$$\therefore A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

دند کیے لئے بلست :

$$\underline{A} \equiv (A, \theta) \quad \dots (2)$$

الصوت (١) للثمة نسي صوت التفتيح .

والصريح (أي اللبنة) تسمى بالصريح الطبقة اللبنة (صريح الجنياس واللبنة)

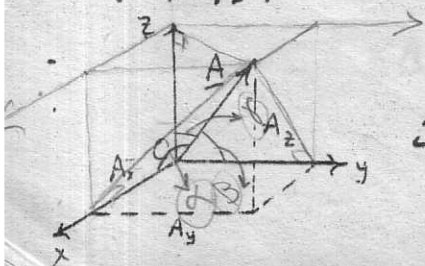
من الفراغ ذي البعثة الجبار إذا كانت مركبات A هي (A_1, A_2, A_3)

في اتجاهات الماور وكانت رصدات البعثات في اتجاهات الماور هي (K, d, i) بالترتيب:

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k} \quad \text{in b)}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

در الزام که نتیجه یض زوایا (α, β, γ) سه ضلع در این است
به ترتیب باشد:



$$\cos \alpha = A_x / A ;$$

$$\cos \beta = A_y / A ;$$

$$\cos \gamma = A_z / A .$$

سؤال (١) :

أوجد متصلة القوة المتجهة لثلاث جهات بالتعريف الآتية :

$$\underline{F}_1 = 2\hat{i} + 3\sqrt{3}\hat{j} , \underline{F}_2 = (8, 120^\circ) , \underline{F}_3 = (2, 180^\circ)$$

الحل :

المتصلة $\underline{R}$ هي :

$$\begin{aligned} \underline{R} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \\ &= 2\hat{i} + 3\sqrt{3}\hat{j} + 8\cos 120^\circ\hat{i} + 8\sin 120^\circ\hat{j} + 2\cos 180^\circ\hat{i} + 2\sin 180^\circ\hat{j} \\ &= (2 - 4 - 2)\hat{i} + (3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 0)\hat{j} \\ &= -4\hat{i} + 7\sqrt{3}\hat{j} \\ \therefore R &= \sqrt{16 + 147} = \sqrt{163} \end{aligned}$$

دائما كل متجه مع محور x زاوية α هي :

$$\tan \alpha = \frac{7\sqrt{3}}{-4}$$

سؤال (٢) :

$$5\underline{A} + 2\underline{B} = 12\hat{i} + 19\hat{j} , \quad 3\underline{A} + 2\underline{B} = 8\hat{i} + 13\hat{j}$$

$\underline{A}, \underline{B}$

نأخذ متساوي الاتجاه لكل

الحل :

$$3\underline{A} + 2\underline{B} = 8\hat{i} + 13\hat{j} \quad \dots (١)$$

$$5\underline{A} + 2\underline{B} = 12\hat{i} + 19\hat{j} \quad \dots (٢)$$

∴ طرح (١) من (٢) نجد أنه :

$$2\underline{A} = 4\hat{i} + 6\hat{j}$$

$$\therefore \underline{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\therefore \underline{A} = (\sqrt{13}, \tan^{-1} \frac{3}{2})$$

∴ (٣)

وبالتعويض من (3) في (1) نحصل:

$$6\hat{i} + 9\hat{j} + 2\hat{k} = 8\hat{i} + 13\hat{j}$$

$$\therefore \hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\therefore \underline{B} = (\sqrt{5}, \tan^{-1} 2)$$

9 ضرب متجهي : Product of two vectors

هناك نوعان من ضرب متجهي وهما:

scalar product.

vector product.

أولاً: الضرب القياسي لمتجهي.

ثانياً: الضرب الاتجاهي لمتجهي.

رسون ندرس كل منهما فيما يلي:

أولاً: الضرب القياسي:

يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهي بأنه كمية قياسية (غير متجهي) تأتي حاصل ضرب متجه كل من المتجهين في جيب تمام الزاوية بينهما.

نأخذ الآن $\underline{A}$ و $\underline{B}$ متجهي الزاوية بينهما θ فإذن حاصل الضرب القياسي لهما

$$\underline{A} \cdot \underline{B}$$

يكتب هكذا:

رسم التعريف يكون:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

رسم ثم يكون:

$$\textcircled{1} \underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = AB \cos \theta$$

ربما $B \cos \theta$ هو مركب $\underline{B}$ على $\underline{A}$ فإذن $\underline{A} \cdot \underline{B}$ يساوي طول $\underline{A}$ مضروباً في مركب $\underline{B}$ على $\underline{A}$.

بالمثل يمكن أن نعتبر $\underline{A} \cdot \underline{B}$ يمثل طول $\underline{A}$ مضروباً في مركب $\underline{B}$ على $\underline{A}$.

أي أنه حاصل الضرب القياسي لمتجهي يساوي حاصل ضرب متجهيهما في مركب الكوساين.

رسم التعريف نستنتج أنه إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ فإذن المتجهين يكونان متعامدين.

$\cos 0^\circ = 1$

$\underline{i} \cdot \underline{i} = (1.1) \times 1 = 1$

كذلك فإنه $\underline{j} \cdot \underline{j} = 1$ و $\underline{k} \cdot \underline{k} = 1$ (نفس الشيء)

$\underline{i} \cdot \underline{j} = (1.1) \times 0 = 0$

$\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{i} = \underline{k} \cdot \underline{k} = 1$

$\underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{k} \cdot \underline{i} = 0$

وهذه إذاً:

مأخوذه

مقدار واتجاه
محدد بالنسبة
للتلاثة متوازية

$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}$

$\underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$

لا داعي للاهتمام هنا بما إذا كانت $\underline{A}$ و $\underline{B}$ لهما نفس الاتجاه في فضاء 3D. المهم هنا هو أن $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ متعامدين على بعضهما البعض.

$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \cdot (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k})$

$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

وبما أن:

$\underline{A} \cdot \underline{B} = AB \cos \theta$

$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$

$\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$ (2)

وهذه المعادلة إذاً:

$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$

مثال (11)

أوجد الزاوية بين المتجهين:

$\underline{a} = 2 \underline{i} + \underline{j} + 3 \underline{k}$

$\underline{b} = \underline{i} - 3 \underline{j} + 2 \underline{k}$

الحل:

إذاً نستخدم المعادلة (2) فبما أن:

$\cos \theta = \frac{2(-3) + 6}{\sqrt{14} \sqrt{14}}$

$= \frac{5}{14}$

مثال (٤) :

أوجد قيمة m التي تجعل المتجهين: $\underline{A} = m\underline{i} - 2\underline{j} + \underline{k}$, $\underline{B} = 2m\underline{i} - m\underline{j} - 4\underline{k}$ متعامدين.

الحل :

∴ المتجهين متعامدين

$$\therefore \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$\therefore 2m^2 + 2m - 4 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$\therefore (m+2)(m-1) = 0$$

$$\therefore m = -2$$

$$\text{أو } m = 1$$

ثانياً : الضرب الاتجاهي

يعرف حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين بأنه متجه مقداره يساوي حاصل ضرب مقداري المتجهين في جيب الزاوية بينهما واتجاهه محدد من المستوى المتجهين ونضع

المتجه $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$ حيث $\underline{C}$ عمودي على $\underline{A}$ و $\underline{B}$ أي $\underline{C} \perp \underline{A}$ و $\underline{C} \perp \underline{B}$
 انتقال المتجه الدائري للمصدر $\underline{C}$ إلى $\underline{A}$ و $\underline{B}$ بحيث

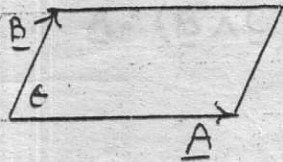
نلاحظ أن $\underline{A}$, $\underline{B}$ هما متجهان وحاصل ضرب اتجاهيهما هو $\underline{C}$ بأنه حاصل ضرب اتجاهيهما في جيب الزاوية بينهما :

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \quad \text{أو} \quad \underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B}$$

إذا كانت الزاوية بينهما θ فإنه :

$$\underline{C} = \underline{A} \wedge \underline{B} = AB \sin \theta \underline{n} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

حيث $\underline{n}$ دالة متجه محدد على كل من $\underline{A}$, $\underline{B}$ وتكون دالة متجهية



رؤا في سه هذال تعريف انه مقياس حاصل
الضرب المتجهي لـ "متجهين" $\underline{A}$ و $\underline{B}$
ساعة متوازاة المتجهين المتساويين
لهذيه المتجهيه.

كذلك نستنتج من التعريف انه:

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = -\underline{B} \wedge \underline{A} ;$$

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k} ; \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} ; \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j} ;$$

$$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = 0$$

وعلى ذلك اذا ما:

$$\underline{A} = A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k} ; \underline{B} = B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}$$

فانه:

$$\begin{aligned} \underline{A} \wedge \underline{B} &= (A_x \underline{i} + A_y \underline{j} + A_z \underline{k}) \wedge (B_x \underline{i} + B_y \underline{j} + B_z \underline{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \underline{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \underline{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \underline{k} \\ &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad * \quad (٥) \end{aligned}$$

Triple product.

١٠ حاصل ضرب ثلاثة متجهات :

$$* \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})$$

رؤا في انه حاصل الضرب المتري:

كمية قياسية وليس حاصل الضرب القياسي لثلاث متجهات.
ربطه متابع البند السابق نستنتج انه:

$$* \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = A_x (\underline{B} \wedge \underline{C})_x + A_y (\underline{B} \wedge \underline{C})_y + A_z (\underline{B} \wedge \underline{C})_z$$

وكذا:

$$\underline{B} \wedge \underline{C} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\therefore \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x)$$

$$\therefore \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad ** \textcircled{5}$$

نلاحظ هنا حاصل الضرب المتجهي للثلاث قياسات كما يلي:

$$* \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = [\underline{A} \ \underline{B} \ \underline{C}] *$$

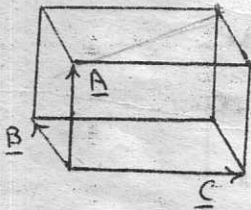
دعونا نرى ما يلي:

$$\underline{A} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B}) = 0$$

هذا لأن المتجهين $\underline{A}$ و $\underline{A} \wedge \underline{B}$ متعامدان.

وباستخدام خواص المحددات يمكن إثبات أن:

$$\textcircled{6} ** \underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \wedge \underline{A}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \wedge \underline{B})$$



دعونا نرى الشكل المبين أعلاه:

حاصل الضرب المتجهي للثلاث قياسات يمثل حجم متوازي السطوح الذي تحدده المتجهات $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ أي أنه يمكن التعبير عن حاصل الضرب المتجهي لـ $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ بالصيغة:

(ثانيًا)

$$* \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C})$$

أما حاصل الضرب المتجهي للثلاث قياسات

فدعونا نرى ما يلي: نلاحظ أن:

$$\textcircled{7} ** \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B \wedge C)_x & (B \wedge C)_y & (B \wedge C)_z \end{vmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك باستخدام المحددات كما يلي:

$$\textcircled{8} ** \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C}$$

المسألة: إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، فاحسب $A+B$ و $A-B$.



الحل:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+3 \\ 3+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-3 \\ 3-2 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

المسألة:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

و:

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}$$

For 2nd ① solve the determinant

② Gather the +ve factors together and the -ve factors together

③ add and subtract the missing factors from the +ve group and the -ve group i.e. we added zeros to the whole group $\Rightarrow$

Now we get the solution

$$(2 \times 8)A + (2 \times 8)A + (2 \times 8)A = (2 \times 8)A$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8$$

سؤال (11):
اثبت أنه:
الحل:

$$(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot (\underline{a} \wedge \underline{b}) + (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{a} \cdot \underline{b}) = a^2 b^2$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= (ab \sin \theta \underline{n}) \cdot (ab \sin \theta \underline{n}) + (ab \cos \theta)^2 \\ &= a^2 b^2 \sin^2 \theta \underline{n} \cdot \underline{n} + a^2 b^2 \cos^2 \theta \\ &= a^2 b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= a^2 b^2 = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

لأنه $\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$

وهكذا

مثال (11):
مثبت أنه:
الحل:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= 2\underline{i} + \underline{j} - \underline{k} \\ \underline{b} &= \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k} \end{aligned}$$

سؤال (12):
أوجد دمت بته عمودية على كل من $\underline{a}$ و $\underline{b}$

الحل:

$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \underline{c}$$

نفسه أنه

معرفة أنه $\underline{c}$ عمودي على كل من $\underline{a}$ و $\underline{b}$

$$\underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k}$$

دلتنا أنه دمت بته العمودية هي:

$$\underline{c}_0 = \frac{\underline{c}}{|\underline{c}|} = \frac{\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k}}{\pm \sqrt{1+25+9}} = \pm \frac{\underline{i} - 5\underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{35}}$$

For $\underline{a}$ and $\underline{b}$ may form a left or right handed system

سؤال (13):

$$(\underline{A} \wedge \underline{B}) \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) = \underline{B} [\underline{A} \underline{B} \underline{C}]$$

اثبت أنه:
الحل:
بما أنه:

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{D}$$

باز فرضنامه
باشد:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \underline{D} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) \\ &= (\underline{D} \cdot \underline{C}) \underline{B} - (\underline{D} \cdot \underline{B}) \underline{C} \\ &= \{(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{C}\} \underline{B} - \{(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot \underline{B}\} \underline{C} \\ &= \{\underline{A} \cdot (\underline{B} \wedge \underline{C})\} \underline{B} - 0 \\ &= \underline{B} [\underline{A} \wedge \underline{B} \wedge \underline{C}] = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

و درجمله

(۱۱)

(20)

نمونه

۱۱) $abcdef$ شکل دایره شش ضلعی مرکز m ، نقطه خارج

$$\underline{na} + \underline{nb} + \underline{nc} + \underline{nd} + \underline{ne} + \underline{nf} = 6 \underline{nm} \quad \text{اثبت آن}$$

۱۲) abc مثلث L ، m نقطه میانه وتر ac .

$$\underline{ma} + \underline{mb} + \underline{mc} = 0$$

اثبت آن

۱۳) $abcdef$ شکل دایره شش ضلعی . اثبت آن:

$$\underline{ab} + \underline{ac} + \underline{ad} + \underline{ae} + \underline{af} = 3 \underline{ad}$$

۱۴) دایره $A = x^2 + y^2 = 126$ ، $B = -3$ ،

رسم کنید $(A+B)$ بر روی محور مختصات . اثبت آن A مربع مع المربعین

زاویه $\frac{\pi}{3}$

۱۵) ABC مثلث L ، دایره D, E, F تقسیم کننده BC, CA, AB

$$\underline{AD} + \underline{BE} + \underline{CF} = 0 \quad \text{اثبت آن}$$

۱۶) $abcd$ شکل دایره e ، تقسیم ac ، f تقسیم bd ، $3:2$

$$3 \underline{cd} + 2 \underline{cb} + 3 \underline{ad} + 2 \underline{ab} = 10 \underline{ef} \quad \text{اثبت آن}$$

۱۷) ABC مثلث AD, BE تقسیم کننده H تقسیم AB .

$$\left(\frac{\underline{AH}}{\underline{HB}} = \frac{3}{7} \right) \quad \text{اثبت آن}$$

$$\underline{AB} + 2 \underline{CB} + 3 \underline{CA} + \underline{BE} + \underline{DA} = 5 \underline{CH}$$

(17)

(1) ABCD متوازي أضلاع. أثبت أنه:

$$\checkmark \underline{BC} + \underline{AC} + 3\underline{BA} = 2\underline{BD}$$

(2) ABCD متوازي أضلاع. نصف BC في E وصل AE وصل BD

$$\checkmark 2\underline{ab} + \underline{ad} = 3\underline{af} \quad \text{نقاطهما F. أثبت أنه:}$$

(3) أثبت أنه:

$$\underline{a} = (2, 30^\circ), \underline{b} = (8, 120^\circ), \underline{c} = (10, 60^\circ), \underline{d} = (2, 180^\circ)$$

$$5\underline{a} + 3\underline{b} - 2\underline{c} - 12\underline{d} \quad \text{ثابته:}$$

$$(3) \text{ إذا } \underline{a} = (5, 7) \text{ و } \underline{b} = (2, 3) \text{ ثابته: } \underline{a} - 2\underline{b} \text{ ثابته: } \underline{a} - 2\underline{b}$$

$$\underline{c} = 4\underline{i} - 3\underline{j} \quad \text{ثابته: } \underline{c} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$$

$$(4) \text{ إذا } \underline{a} = 4\underline{i} + \underline{j} \text{ و } \underline{b} = \underline{i} - 2\underline{j} \text{ ثابته: } \underline{a} = 4\underline{i} + \underline{j}$$

$$\underline{c} = \underline{i} + \underline{j} \text{ ثابته: } \underline{c} = \underline{i} + \underline{j}$$

$$(5) \text{ ثابته: } \underline{c} = 4\underline{i} - 3\underline{j} \text{ ثابته: } \underline{c} = 4\underline{i} - 3\underline{j}$$

(6) أثبت أنه:

$$\underline{a} = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k} \text{ و } \underline{b} = 3\underline{i} - 6\underline{j} - 2\underline{k}$$

$$(7) \text{ أثبت أنه: } \underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{k} \text{ ثابته: } \underline{a} = 2\underline{i} - 3\underline{j} + 6\underline{k}$$

$$\underline{b} = \underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k}$$

(8) أثبت أنه:

$$\underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) + \underline{B} \wedge (\underline{C} \wedge \underline{A}) + \underline{C} \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) = 0$$

$$\underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = 0$$

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \underline{B} \wedge \underline{C} = \underline{C} \wedge \underline{A}$$

$$7\underline{a} + \underline{b} = (16, 120^\circ) \text{ و } 3\underline{a} + \underline{b} = (8, 60^\circ)$$

(9) ثابته: $\underline{a}$ و $\underline{b}$

$$\underline{a} = (3, -5, -4)$$

$$\underline{b} = \underline{mi} - \underline{k}$$

$$\underline{B} \wedge \{ \underline{A} \wedge (\underline{B} \wedge \underline{C}) \} = (\underline{A} \cdot \underline{B})(\underline{C} \wedge \underline{B})$$

$$[(\underline{A} \wedge \underline{B}) \cdot (\underline{A} \wedge \underline{C}) \times \underline{D}] = (\underline{A} \cdot \underline{D}) [\underline{A} \wedge \underline{B} \wedge \underline{C}]$$

الباب الثاني

اتزان القوى المستوية

Equilibrium of coplanar forces.

II اتزان نقطة مادية تحت تأثير تربيعة:

الذي يبدأ بدراسة علم الاستاتيكا والديناميكا الذي يدرس اتزان الأجسام تحت تأثير سبعة من القوى. ونذكر هنا أنه لفرض تتعدد تأثيرات عناصر هي المتدار والاتجاه ونشئة التأثير ولهذا يقال بأنه الفرض بقية تفيد.
وإذا اتزنت نقطة مادية تحت تأثير تربيعة فإنها تكون في حالة رتيبة في الفضاء وتساوي في الاتجاه وحفظا عليها على استقامته راسية.
ولذلك ذلك نفرضه أنه القوىيه هما F_1 و F_2 وميتة انهما متزانين لانه:

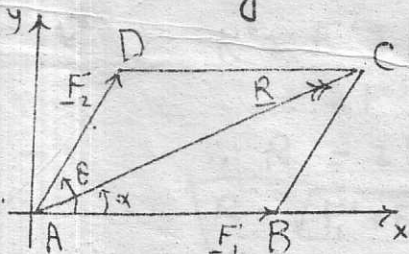
$$\underline{F_1} + \underline{F_2} = 0$$

$$\therefore \underline{F_1} = -\underline{F_2}$$

وكما عرفنا أنه دراسة التربيعة لانه المتجهيه F_1 و F_2 يكونان متساويين في المقدار وتساويين في الاتجاه وحفظا عليها على استقامته راسية لهذا يبراهن نقطة راسية.

Parallelogram of forces.

III متراكبين اضليخ القوى:



إذا أثرت قوتان في نقطة مادية A واحدة
تتكونان متراكبين في اتجاههما فيطابقان متراكبين
AB و AD متساويان في الاضليخ ABCD
التي تكون متساويين في الاضليخ AC بين الجهتين في اتجاههما.
البرهان:

$$\underline{BC} = \underline{F_2}$$

"in magnitude and direction" but not in line of action

(18)

لدينا ناخذ AB متوازيات F_1 و F_2 الى A متوازيات

$$\therefore F_1 = F_1$$

$$F_2 = F_2 \cos \theta + F_2 \sin \theta$$

حيث F_1, F_2 لقرانه θ الزاوية بينهما
المتجه R تنبسط الى الصفر:

$$R = F_1 + F_2$$

$$= (F_1 + F_2 \cos \theta) + F_2 \sin \theta$$

$$\therefore R = \sqrt{(F_1 + F_2 \cos \theta)^2 + F_2^2 \sin^2 \theta}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \theta}$$

رأى ان المتجه R يميل الى زاوية α مع المتجه F_1 حيث:

$$\tan \alpha = \frac{F_2 \sin \theta}{F_1 + F_2 \cos \theta}$$

طالوت فاصلة:

(1) اذا كانت $F_1 = F_2 = F$ متساوية:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{F \sin \theta}{F + F \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\theta}{2}$$

وهذا يعني ان المتجه R يميل الى زاوية $\frac{\theta}{2}$ مع المتجه F_1
كذلك فانه:

$$\begin{aligned} R^2 &= F^2 + F^2 + 2F^2 \cos \theta \\ &= 2F^2 (1 + \cos \theta) = 4F^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore R = 2F \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ \tan \alpha &= \frac{F_2}{F_1} \end{aligned}$$

(2) اذا كانت $\theta = 90^\circ$ فانه:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2}$: إذا $\theta = 0^\circ$ (5)

$$= F_1 + F_2$$

$$\tan \alpha = 0$$

$\therefore x = 0$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2}$$

$$= F_1 - F_2$$

$$\tan \alpha = 0$$

$$\therefore \alpha = 0^\circ$$

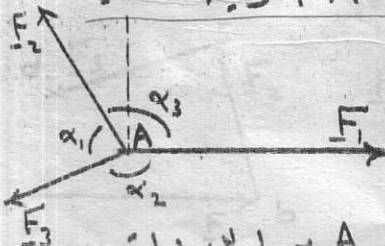
(۴) إذا كانت $\theta = 180^\circ$ فإن:

ایں اہل ہندو کے تہذیب و تمدن کے آئینہ نگار ہیں۔

Lami's rule

۳ قاعدے لکھی :

هذه التامة لو انه اذا انزلت نقطة مادية تحت تأثير قوى متوالية
كانت تتحرك كل من طرفيها مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الموضعتين
التي هما:



نقصه المسمى F_1, F_2, F_3
في التمثيل المادي A ونقصه الزوايا
في كل موضع في الكل المبادر.

أخذت من F صوراً للحيات ولعمودى اليه مع A صوراً للصداقات.

∴ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\underline{F}_1 = F_2 \cos \alpha_3 \underline{i} + F_2 \sin \alpha_3 \underline{j}$$

$$\underline{F}_3 = F_3 \cos \alpha_2 \underline{i} - F_3 \sin \alpha_2 \underline{j}$$

دعایا لم المدرس تزیینة فایم :

$$\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 0$$

$$\therefore (F_1 + F_2 \cos \alpha_3 + F_3 \cos \alpha_2) \underline{i} + (F_2 \sin \alpha_3 - F_3 \sin \alpha_2) \underline{j} = 0$$

$$\therefore F_2 \sin \alpha_3 - F_3 \sin \alpha_2 = 0$$

$$\frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}$$

(11)

Having a Common origin

① When F 's Coplanar and in equilibrium② the magnitudes of the F 's get the relation

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}$$

① Know the quarter at which the vector lie.

② Change the $\cos$ or $\sin$ according to the angle as a whole③ $\sim$ $\sim$ sign of the function as the
Sub angle indicate.

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

Whatever θ is
i.e. $\theta = +ve$ or $-ve$

(٢٠)

بما أن القوى الثلاث متوازنة، فإنها يجب أن تكون في خط واحد، أي F_2 يجب أن يكون في خط F_1 و F_3 ، بالتالي نجد أنه:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}$$

وبما أن القوى متوازنة:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}$$

وهذا هو قانون لافير

وهذه هي قاعدة لافير

Triangle of forces.

ثلاث القوى

نفس قاعدة ثلاث القوى لأننا إذا اتزنت ثلاث قوى متساوية تؤثر في نقطة واحدة، فإنها يمكن تمثيلها بمثلث، وإجمالاً، بأضلاع مثلث متساوية في ترتيب دور واحد.

البرهان:

لنفرض أن القوى هي: F_1, F_2, F_3

وبما أن متزنة فإنه:

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = 0$$

بما أن F_1 يساوي $\underline{ab}$ لنفرض

F_2 يساوي $\underline{bc}$ لنفرض

F_3 يساوي $\underline{cd}$ لنفرض

فإنه:

$$\underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} = \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd}$$

$$\therefore \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} = 0$$

وهذا هو البرهان

$$\underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} = \underline{ad}$$

وكذلك

$$\therefore \underline{ad} = 0$$

أي أنه d متطابق على a

وهذا هو البرهان الثلاث المتوازنة المتساوية يمكن تمثيلها بمثلث، وإجمالاً، بأضلاع مثلث متساوية في ترتيب دور واحد.

وهذا هو البرهان

(11)



Since we have moved to new frame which coincide with $\hat{x}_2$ we much put in consideration that the unit vectors in this case are not $\hat{i}$ and $\hat{j}$ as the previous frame but may be $\hat{e}_1$ and $\hat{e}_2$.
 But this doesn't change the result since we want at the end, to prove equilibrium whatever the frame.

- ① 3 $\vec{F}$'s having a common origin
 - ② in equilibrium $\Rightarrow$ these $\vec{F}$'s can be represented as the sides of a triangle in a cyclic direction i.e. closed loop

$$0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

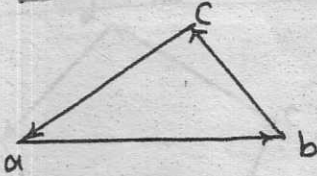
$$0 = \hat{i}(\cos \theta_1 \vec{F}_1 - \sin \theta_1 \vec{F}_2) + \hat{j}(\sin \theta_1 \vec{F}_1 + \cos \theta_1 \vec{F}_2) + \vec{F}_3$$

$$0 = \cos \theta_1 \vec{F}_1 - \sin \theta_1 \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\frac{\vec{F}_1}{\cos \theta_1} = \frac{\vec{F}_2}{\sin \theta_1}$$

٤١) مكس مكس القوى :

من ثالثة مكس مكس القوى لأنه إذا أثرت قوى متساوية في نقطة مادية
مكس تمثيل متدا داجاها بأضلاع مكس مأخوذة في ترتيب دوري واحد
بأنظر تكوينه متزنة .



فرضه أنه القوى المتساوية هي F_1, F_2, F_3
لأنه أضلاع المكس abc مأخوذة في ترتيب دوري واحد
مكس هذه القوى متدا داجاها .

$$F_1 = \underline{ab} , F_2 = \underline{bc} , F_3 = \underline{ca}$$

$$\underline{ab} + \underline{bc} + \underline{ca} = 0$$

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

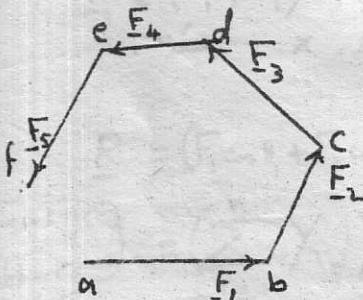
مطلوب

∴ القوى متزنة

Polygon of forces.

٤٢) ضلع القوى :

من ثالثة ضلع القوى لأنه إذا أثرت مسبوقة من القوى المتساوية المتزنة في نقطة مادية
لأنه مكس تمثيل متدا داجاها بأضلاع ضلع تقبل مأخوذة في ترتيب دوري واحد .
البرهان :



فرضه أنه القوى المتساوية هي : F_1, F_2, F_3, F_4, F_5

وأنه الجوانب : $\underline{ab}, \underline{bc}, \underline{cd}, \underline{de}, \underline{ef}$

تكونت القوى متدا داجاها في ترتيب
فبأنظر القوى متزنة فانه :

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

$$\therefore \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} + \underline{de} + \underline{ef} = 0$$

$$\therefore \underline{af} = 0$$

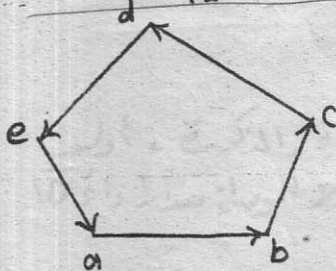
أي أنه لننظر f لننظر a

القوى المكس تمثيل متدا داجاها بأضلاع ضلع تقبل مأخوذة
في ترتيب دوري واحد
مطلوب

٧ عكس مضلع القوى :

من ثابته عكس مضلع القوى لأنه إذا أثرت سبعة قوى المستوية المنتظمة مادية
على كبر تمثيلها متساويًا واتجاهها بأضلع مضلع منتظم بأضوذة في ترتيب دوري واحد
فإنه لهذه القوى تكون متزنة .

البرهان :



فرضه أنه القوى هي F_1, F_2, F_3, F_4, F_5
منه أضلع المضلع المنتظم $abcde$ تمثل هذه القوى
بمقدارًا واتجاهها .

$$\therefore \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_3} + \underline{F_4} + \underline{F_5} = \underline{ab} + \underline{bc} + \underline{cd} + \underline{de} + \underline{ea}$$

$$= 0$$

وهو المطلوب

∴ القوى متزنة

٨ إيجاد مصلة عدة قوى مستوية تؤثر في نقطة مادية :

(أولاً) تحليلياً : نأخذ سبعة القوى المستويات في مستوى القوى المؤثرة
فرضه أنه لدينا سبعة قوى مستوية المؤثرة في نقطة مادية كالآتي :

$$\underline{F_1} = (F_1, \theta_1), \underline{F_2} = (F_2, \theta_2), \dots, \underline{F_n} = (F_n, \theta_n)$$

حيث θ_1 هي الزاوية التي تصنعها F_1 مع محور x وهذا .
فإذا كانت المصلة هي $\underline{R}$ فإنه :

$$\underline{R} = (F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + \dots + F_n \cos \theta_n) \underline{i} + (F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2 + \dots + F_n \sin \theta_n) \underline{j}$$

$$= \left(\sum_{r=1}^n X_r \right) \underline{i} + \left(\sum_{r=1}^n Y_r \right) \underline{j}$$

$$= X \underline{i} + Y \underline{j}$$

حيث $X = \sum_{r=1}^n X_r$ هي مجموع مركبات القوى في اتجاه المحور x .

حيث $Y = \sum_{r=1}^n Y_r$ هي مجموع مركبات القوى في اتجاه المحور y .

represent the
components of
force on the
x axis

from $r=1$

to n

where $n =$
forces

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

رأبجأهأ بضع مع مصدر x زاذبة α هبأ :

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X}$$

(ثانيا) بآنا :

بكمه رسم ضلع القوس للقرى المذرة في النقطه الماربه والمذكر في أوله بكمه الضلع الذي يقبل الضلع في الدبأه المضار سلا للموصلة سذأ رأبجأهأ.

سركا اترابه سببته مع القوس المسويه للمذرة في نقطه ماريه :

مرقا في البند الساببه انه إذا كانت R هب سببته مع القوس المسويه المذرة في نقطه ماريه بانه :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

بأذا كانت القوس مزنة بانه :

$$R = 0$$

$$\therefore X = 0, Y = 0$$

وهذا هب سركا اترابه سببته مع القوس المسويه للمذرة في نقطه ماريه .

اترابه لطفه نقطه ماريه مسويه :

هذه رأسه اترابه لطفه نقطه ماريه مسويه سببته بآنا بكمه لكره دعبه بآنا بكمه بوا سببته سببته أو قضا به سببته بآنا بكمه أوله رأسه اترابه المسويه لكل رض لطفه الواله نزل القوس الداطليه بكمه السدود في الحفوط أو لوطرات في القضا به المسويه لوطر بكمه سببته بكمه .

بكمه لطفه هذه القوس الداطليه بآنا بكمه اترابه لطفه نقطه ماريه لوطر لطفه هذه القوس الداطليه بكمه لطفه بكمه .

المعادلة:

المعادلة: $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة: $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$



$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

المعادلة:

To investigate the equilibrium of several coplanar

points, which are connected to each other to form

a rigid body by strings or rods we have to do

① neglect inner forces, i.e. tension or stresses

for they cancel each other, and study the group as a whole in equilibrium.

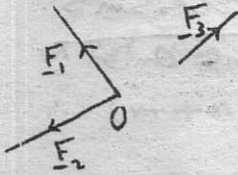
② to calculate inner points, study equilibrium of each independent point; for inner points are now put into consideration.

اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى :

إذا اتزان جسم بواسطة تحت تأثير ثلاث قوى متزنة فإنه خطوط عملها إما أن تكون متوازية وإما أن تكون في نقطة واحدة.

البرهان :

لنفترض أن القوى المتزنة ثلاثة فإنها تكون في نقطة واحدة أو تكون متوازية.



لنفترض أن القوى المتزنة هي F_1, F_2, F_3 فإنها تكون في نقطة واحدة أو تكون متوازية.

F_3 تتوازن مع F_1, F_2

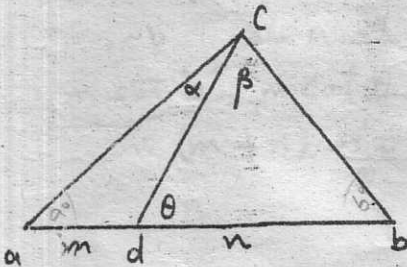
لكنه F_1, F_2 تتوازن في نقطة 0

$\therefore F_3$ لابد وانها تتوازن في نقطة 0 أيضا.

البرهان

إذا كانت القوى المتزنة تتوازن في نقطة 0

نظرية سينية هامة :



نقطة D تقع على الضلع AB من المثلث ABC

تقسم AB إلى قسمين $AD = m, DB = n$

CD ينقسم الزاوية $\hat{C}$ إلى α, β

في الشكل $\hat{CDB} = \theta$ ثابت

$$(m+n) \cot \theta = m \cot \alpha + n \cot \beta$$

$$(m+n) \cot \theta = n \cot \alpha + m \cot \beta$$

$$\frac{m}{n} = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{CD} \times \frac{CD}{DB}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \times \frac{\sin \beta}{\sin \beta}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} \times \frac{\sin (\theta + \beta)}{\sin \beta}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{ثم } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \alpha}$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\theta = \alpha + \alpha$$

$$\therefore \alpha = \theta - \alpha$$

$$\theta + \beta + b = 180$$

$$b = 180 - (\theta + \beta)$$

$$\sin (\theta + \beta) = \sin b = \sin [180 - (\theta + \beta)] =$$

$$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{m \sin \beta \sin \theta \cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta \sin \theta} - \frac{m \sin \beta \cos \theta \sin \alpha}{\sin \theta \sin \beta \sin \alpha} =$$

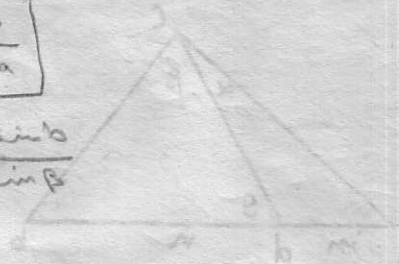
$$\frac{m \sin \alpha \sin \theta \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \theta} + \frac{n \sin \alpha \cos \theta \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \theta}$$

$$\frac{cd}{\sin a} = \frac{m}{\sin \alpha} \quad \& \quad \frac{cd}{\sin b} = \frac{n}{\sin \beta}$$

$$\therefore cd = \frac{m \sin a}{\sin \alpha} = \frac{n \sin b}{\sin \beta}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin \alpha \sin b}{\sin \beta \sin a}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \times \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

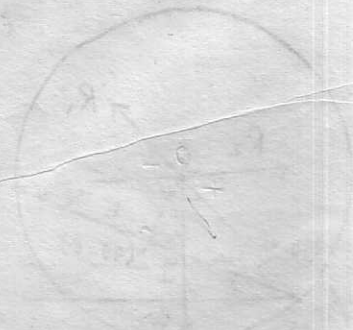


$$\begin{aligned}
 (1, +0) &= \sin \alpha = (1-0) \sin \alpha = m \\
 (1, +0) \sin \alpha &= (1-0) \sin \alpha = m \\
 \sin \alpha &= m \\
 \alpha &= \sin^{-1} m \\
 \alpha &= \sin^{-1} m
 \end{aligned}$$

$$\frac{R_1}{\sin(180 - (\alpha + \theta))} = \frac{R_2}{\sin(180 - (\alpha - \theta))} = \frac{w}{\sin 2\alpha}$$

$$(a+b) \tan \theta = b \tan \alpha \rightarrow a \tan \alpha$$

$$a + b \tan \theta = \underline{b - a} \tan \alpha$$



الوزن w نارا ببرك الشئ G
 مناه لقوة السكونية مخرقة .

وطول الوزن w لوبد دانه ير بالنقطه D كما في الشكل
 فرضنا انه ليقرب يصنع مع الزنق زاوية θ كما في الشكل
 كما انه لزنق AE مودك لا فط ليل لوزنه
 E تقع لا صيط لداق .

سه لانه سم الشكل دافني انه :

$$AE = AD \cos 2\theta = a \cos \theta$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}a(2\cos^2 \theta - 1)}{2} = a \cos \theta$$

$$2\sqrt{3}\cos^2 \theta - \sqrt{3} = \cos \theta$$

$$2\sqrt{3}\cos^2 \theta - \cos \theta - \sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}\cos \theta + 1)(2\cos \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ or } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

كذلك بتطبيقه ثالث لوزن بنده انه :

$$\frac{w}{\sin(40^\circ - \theta)} = \frac{R_1}{\sin \theta} = \frac{R_2}{\cos 2\theta}$$

$$R_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} w = \frac{1}{\sqrt{3}} w$$

$$R_2 = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} w = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} w = \frac{1}{\sqrt{3}} w$$

ال (٣)

كترانه ملكا دانه بتساويانه في الوزنه زرفف لظفر . وضعنا رافل مخرط
 لوزن قائم المثلث بيت بيت ليل مودك لوزن الرأس زاوية θ وكانت لوزن كرف
 المخرط في نقطه دافني . انبت انه ليعود لوزن للكرتيه يصنع مع الرأس زاوية متساها
 $\cot^{-1} \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\alpha + \cos 2\theta}$ حيث 2α زاوية رأس المخرط .

اظهار:

مركزی پکڑیہ ہا A, B کاغہ اشک

D ہے

ADB دھریف پکڑیہ دھریف

لیف

وزن کل ہا ساری w

وزن ہا 2w دھریف

D دھریف AB لکڑی

وزن دھریف دھریف

توزن دھریف دھریف دھریف

A دھریف R1 دھریف دھریف دھریف

B دھریف R2 دھریف دھریف دھریف

C دھریف 2w دھریف دھریف دھریف

D دھریف 2w دھریف دھریف دھریف

ADB دھریف 2w دھریف دھریف

A C D = 180 - [90 - (θ - α)] = 90 + θ - α

A C D + E C D = 180 - 2α

LECF دھریف دھریف

E C D = 180 - 2α - 90 - θ + α = 90 - θ - α = 90 - (θ + α)

Δ ABC دھریف دھریف

2α cot δ = α cot {90 - (θ + α)} - α cot (90 + θ - α)

2 cot δ = $\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} + \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos(\theta - \alpha)}$ cot δ = $\frac{\sin(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha) + \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta - \alpha)}{2 \cos(\theta + \alpha) \cos(\theta - \alpha)}$ cot δ = $\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta + \cos 2\alpha}$

دھریف

مركز دلتا على تقاطع خط مركز دائري اولى مستواه رأس دلتا مركز
خط خفيف اولى تقاطع مركز دلتا وضع الدائرة كما في الخط وضع زاوية θ
في الرأس. اوجد θ في الخط ودرج اولى لا الخرق.

مركبه حلقاه وزناهما w_1, w_2 لا على دائري اولى بيت في مركز
دلتا بين خط خفيف يقابل زاوية β في مركز الدلتا
وضع الدائرة على النصف اولى θ اوجد θ في الخط θ على
الخط تعيين المعادلة:

$$\tan \alpha = \frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2} \tan \beta$$

رسم دائرة في مركز دائري في المثلث المثلث اولى اوضاع α, β, γ
مثل w في النصف α ثم المثلث المثلث β كما bc اوضاع اولى
خطية في b, c وضع كل منها الزاوية 135° مع النصف.

بيت θ في الخط bc اوجد θ في الخط bc اوجد θ في الخط bc

مركبه حلقاه وزناهما w_1, w_2 تتلاقح في قضيبه عدديه اولى AB, AC
بلا في النصف بالزاوية α, β في اولى نارا كانت A اولى كل B, C
وصلت الحلقاه في خط خفيف في مركز نارا في الخط اوجد θ في الخط
وضع الدائرة على الخط في النصف زاوية θ اوجد θ في الخط

$$\tan \theta = \frac{w_1 \cot \beta - w_2 \cot \alpha}{w_1 + w_2}$$

$$T = w_2 \tan \beta$$

مركز قضيب في طلة اترانه في مركز اولى في مركز
الزاوية α, β دلتا لعا في خط اولى. نارا كما مركز مثل القضيب
يتم الى جزائيه طولها a, b نارا في القضيب في النصف
كذلك في مثل المستوي.

قريب تتلم طوله $2h$ موضع داخل انا نصف كروي اولى بيت في
كانت حافة الدائرة افقية نارا كما نصف قطر الدائرة α دائرة في قضيب
وضع مركزه في حافة الدائرة في حافة الدائرة في حافة الدائرة في حافة الدائرة

بدان. اثبت انه في وضع الدزانه يصنع القوس مع الزاوية θ
تحت العلاقة:

$$2a \cos 2\theta = h \cos \theta$$

✓ ab قضيب منتظم وزنه w وطوله l ملحقة منتظمة ثابتة O
بجانبه Oa, Ob طول كل منها l أيضا. نأخذ الموضع مثل نرى $3w$
في بعد $\frac{l}{3}$ من الطرف a نأخذ الزاوية التي يصنعها القضيب
مع الأفقية في حالة الدزانه هي $(\cot^{-1} 4\sqrt{3})$ ثم أوجد البعد
من كل من الطرفين.

• علفت كرف وزنته w نصف نظريها a بجيب طوله a أيضا
من نقطة ثابتة يدور ببطء حول قضيب منتظم وزنه w وطوله
يأدي $4a$ ويسند على كرف مائل للزاوية 45° عند نقطة
أوجد ميل كل من القضيب والخط مع الرأس في حالة الدزانه وأوجد
كذلك الشد في الخط.

• دزانه ملفقة صغيفة على سطح دائري أملس نصف قطره a يثبت في
مركزه رأس. شدة الحلقة بجيب طوله $\frac{a}{2}$ طرفه الآخر مربوط في إحدى
نقطتي السطح الواقعية في نفس السطح المنقطع مع المركز. اثبت انه يثبت
في الجيب يأدي $0.9w$ حيث w دزانه الحلقة.

✓ $abcd$ قضيب قضيب يثبت طرفاه d, a في قضيبين قضيبين
أفق طوله 38 ft . ملحقة به في c, b دزانه w و 25
من دزانه لها دزانه مع الترتيب. في وضع الدزانه كانت c, b
أفضل ad بمقدار $15, 8$ مع الترتيب نأخذ a بمقدار 20

$$(52) \quad cd = 17 \text{ ft.}, ab = 10 \text{ ft.}$$

✓ AB قضيب غير منتظم يثبت مركز ثقله بنسبة $2:3$. وضع
القضيب في حالة اتزان داخل إناء كروي أملس نأخذ كانت الزاوية التي
يصنعها القضيب مع المركز يأدي $\frac{\pi}{2}$ نأخذ الزاوية بين القضيب
مع الأفقية هي $\frac{1}{5} \tan^{-1}$ ثم أوجد رد الفعل عند طرفي القضيب برامد وزنه.

الحدود
الارتفاع

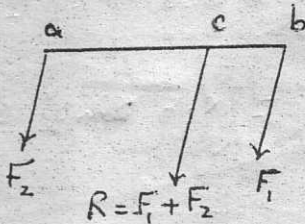
تقيب تقير تتلهم طوله 13 in. ووزنه 10 lb. عظمه في نظم ثابتة
 في نظم فيطيه خفيفيه غير مرئيه يتصل به بطرنيه . فاذا كانه حول فيطيه
 12 in. 6 5 in. . أو بعد الزاوية إلى صنف التقيب مع الرأس
 أو بعد الحنيه في فيطيه .

الباب الثالث

القوى المتوازية - العزم - الأزواج

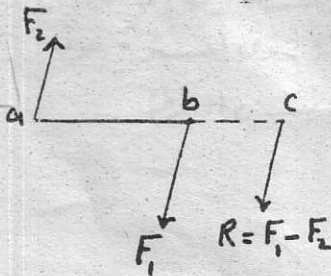
Parallel Forces - Moments - Couples.

Like
Forces



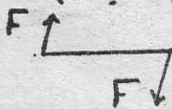
سعة توتير متوازية في اتجاه واحد :
سعة توتير متوازية في اتجاه واحد F_1 و F_2
شاذ $(F_1 + F_2)$ وتوازيها في اتجاهها
قسم السانة بينها نسبة لكسبة F_1, F_2
أي أنه : $F_1 \cdot bc = F_2 \cdot ac$
كما في الشكل .

Unlike
Forces



سعة توتير متوازية في اتجاهيه متضاديه :
سعة توتير متوازية في اتجاهيه متضاديه F_1, F_2
شاذ الزنه به لتوتير $(F_1 - F_2)$ وتوازيها
في اتجاه الكبرى وتقس السانة بينها نسبة الخارج سه فح
نسب الكبرى نسبة لكسبة المقدار بها .
أي إذا كانت $F_1 > F_2$ بأنه :
 $R = F_1 - F_2$
 $F_1 \cdot bc = F_2 \cdot ac$

توتير أزواج متوازية في اتجاهيه متضاديه في اتجاهيه متضاديه
سعة توتير متوازية في اتجاهيه متضاديه
الزواج الذي يعمل في دورانه الجسم



نتیجہ حاصل ہوا کہ اگر ایک جسم پر دو قوتیں ایک دوسرے کے برعکس سمتوں میں لگی ہوں تو یہ جسم متحرک نہیں ہوگا۔
 اگر دو قوتیں ایک جسم پر ایک ہی سمت میں لگی ہوں تو یہ جسم متحرک ہوگا۔
 اگر دو قوتیں ایک جسم پر ایک ہی سمت میں لگی ہوں تو یہ جسم متحرک ہوگا۔

Note :- Previously we discussed the action of forces on a particle.

Now discuss the action of forces on a rigid body.

Moment.

تعريف العزم :

عزم عزم نقى ما F حول نقطة O بأنه حاصل ضرب F في المسافة h من نقطة O إلى خط عمل F .

عزم النقطة F حول O هو Fh .

في h طول المسافة من نقطة O إلى خط عمل F هو المسافة من نقطة O إلى خط عمل F هو المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

عزم العزم F حول O هو Fh .

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

عزم العزم F حول O هو Fh .

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

$$M_o = r \wedge F$$

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

Couple

تعريف العزم :

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

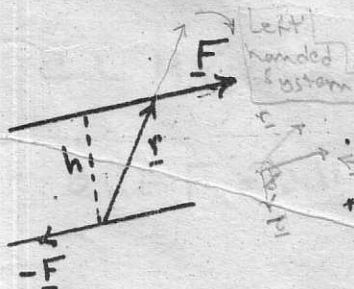
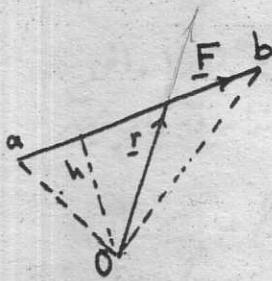
عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

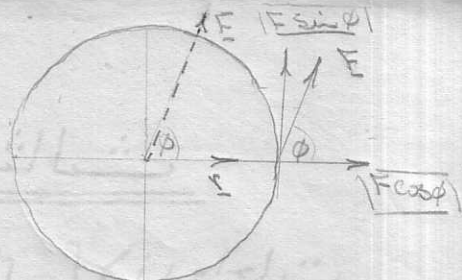
عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .

$$M = r \wedge F$$

$$|M| = Fh$$

عزم العزم F حول O هو Fh وقامته h هي المسافة من نقطة O إلى خط عمل F .





Notice that: $\|F\|$ and $\|r\|$ are always constant
 but $\underline{F}$ and $\underline{r}$ their directions are always changing

$$\underline{r} = r(\cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}) ; \underline{F} = F(-\sin\theta \underline{i} + \cos\theta \underline{j})$$

$\Rightarrow$ in this case ϕ which is between $\underline{r}$ and $\underline{F} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} = r \cdot F \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

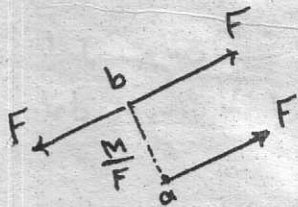
$$r \cdot F \cdot (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \underline{k} = r \cdot F \sin\theta \underline{k} =$$

$$r \cdot F \underline{k}$$

بجهد موزون إثبات أنه المجموع الجبري لغزى فوق الوزن دراج هو أنه نقطة
 متحركة ثابتة دائماً وباريه لغزى لغزى دراج .
 هذه خواص الوزن درجات المتحركة :

١- لو تمكيد الاستقامة مع الوزن دراج بقوى رامية "وهذا واضح
 مع فشل مساواة ايجار موزونة قريبه متساوية في المتدار وتوازنيته
 ولكن في اتجاهيه متضاديه .

٢- يجب أن يلاحظ الذنه بيه تأثير القوت وتأثير الوزن دراج على الجسم إلى
 تدور حول نقطة فالقوت يجب حركة انتقالية للجسم فيما الوزن دراج يجب دورانه .
 ٣- يكافئ الوزن دراجه استوائيه للذنه لوانتس الغزم مع حيث المتدار
 والذنه كما في فيما يترسب الوزن دراجه استوائيه للذنه لوانتس
 الغزم مع حيث المتدار ولكن تحتلف في الدسكاف .
 ٤- أي لمدونه الوزن درجات المتحركة كحائز ازوداجا واحد لغزى يارده
 المجموع الجبري لغزى لغزى لغزى درجات .



٥- ايجار قوت كحائز قوت وازوداجا :

لكنه القوت F ولغزى الوزن دراج M
 مع القوت F تدور عند b .

٦- يمكن استبدال الوزن دراج الذي لغزى M

بتوقيه كل منها F واللبه بينها $\frac{M}{F}$ ونها اتجاهيه متضاديه .

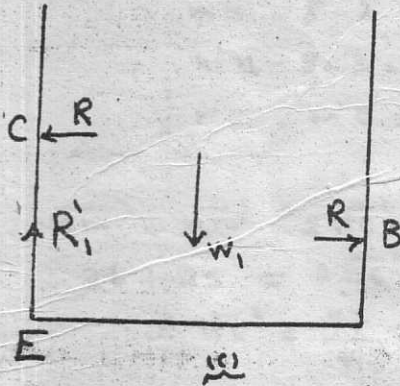
٧- فنتار وضع التوقيه في المشرق بحيث "تترسب" امداهما مع قوت معلونه F
 عند b .

٨- لو تمكيد بانه موزونة قوت المعلونه F عند b بالوزن دراج M كحائز
 مع القوت F عند a .

٩- يجب أن يلاحظ أنه لقوت F عند a توازن القوت المعلونه F عند b

وتعبد له b - a نسبة $\frac{M}{F}$:

Handwritten signature and date: (5) 2/2



در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به

تقریب R', w_1 (در این تقریب)
مساوی است به القیاس (رأب)
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

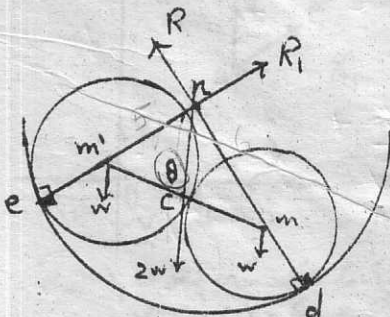
$$w_1 a > 2(a-b)w$$

$$\therefore w_1 > 2\left(1 - \frac{b}{a}\right)w$$

در این تقریب

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

$$\tan \theta = 48$$



در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

در این تقریب R, R' تکواض
در اینجا $2(a-b)w$ است
که به از رواج کذب و ذلت
به از این تقریب است.

وهذا هو المطلوب R_1 بالنقطة $q(E)$

منهنا ومنه λ_1 يجب وجود "رد فعل" له الطح لها الخطوة
من هذا الترخ للمكثية λ رد الفعل لا يكون لها معية λ_1
ولكنه يكون لها رسالة λ الذي هو انماج الناتج من λ_1 يكون
انقضاء ما بين λ منهنا بعد العددا بينها انقضاء ما بين
 λ بعد العددا لا يبرية من خاصية نظر الخطوة (a)
لذلك ليس من المقبول ان رد فعل الطح يكون خارج λ
نقطة من فقط انما ان الخطوة لها الطح
في آخر نقطة لتأثير رد الفعل R_1 لها (E)
في حالة الانزاحة انما ان الخطوة
انما ان $R = \text{انزواج } \textcircled{1} = \text{انزواج } \textcircled{2}$
ولكن لا تتلقا الخطوة حيا انما ان

ملاحظة $\textcircled{2} > \textcircled{1}$

$$\therefore mn = 8 - 2 = 6 \text{ ft},$$

$$m'n = 8 - 3 = 5 \text{ ft};$$

$$\star mc = m'c = 2\frac{1}{2} \text{ ft}.$$

في $\Delta nmm'$ يكون:

$$\overline{nm}^2 + \overline{nm'}^2 = 2\overline{nc}^2 + 2\overline{mc}^2 \quad \star$$

$$36 + 25 = 2\overline{nc}^2 + 2 \cdot \frac{25}{4}$$

$$\therefore \overline{nc}^2 = \frac{97}{4}$$

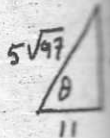
في $\Delta m'nc$ يكون:

$$(5)^2 = \overline{nc}^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2\overline{nc}\left(\frac{5}{2}\right)\cos\theta$$

$$25 = \frac{97}{4} + \frac{25}{4} - 5\overline{nc}\cos\theta$$

$$\therefore 5\overline{nc}\cos\theta = \frac{11}{2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{11}{10\overline{nc}} = \frac{(11)(2)}{10\sqrt{97}} = \frac{11}{5\sqrt{97}}$$



$$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{25 \times 97 - 121}}{11} = \frac{48}{11}$$

المثلث

متساوية

نظرية:

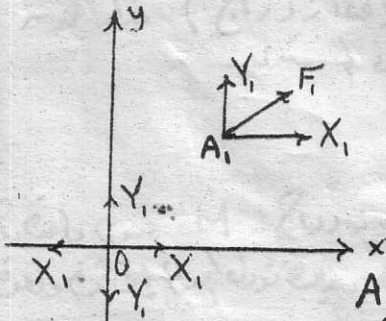
تعتبر في هذه النظرية القوة المؤثرة على جسم جاسي يمكنه أن يتحول على وجه
مستقيم إلى فوق وازدراج. لنفرض أن نقطة اختيارية في الجسم
تتأثر بالقوة $F_1, F_2, \dots, F_n$ في مركزها.

البرهان:

0 نقطة اختيارية في مركزها:

$F_1, F_2, \dots, F_n$

في مركزها:



$A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$

في مركزها: 0 نقطة أصل المحاور إحداثيات في مركزها: (x_1, y_1)

ثم نعلم أنه 0 قوسية متبادلية في المتدار ومختلفية في الوضعية كمنها
تأري X_1 لا عدد لينة قوسية أنه X_1 عند A_1 مكان قوس X_1 عند 0
وازدواجاً لينة ياري $-y_1 X_1$.

من الطريقة نعلم قوسية $Y_1 Y_2$ عند 0 في اتجاهيه متقاربه للحوار
حيث إن Y_1 عند A_1 مكان قوس Y_1 عند 0 وازدواجاً لينة $x_1 Y_1$
في هذا فالقوس $F_1(X_1, Y_1)$ عند A_1 مكان قوس $F_1(X_1, Y_1)$ عند 0
وازدواجاً لينة ياري $(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$ أي ياري لينة F_1 حول 0 .
تكملة ما سببه بالنسبة لبقية القوس نجد أنه الحيدة مكان عند 0 قوس R
وازدواجاً لينة M حيث :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{r=1}^n X_r = \text{مجموع مركبات لينة في اتجاه المحور السيني}$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{r=1}^n Y_r = \text{مجموع مركبات لينة في اتجاه المحور الصادي}$$

$$* M = (x_1 Y_1 - y_1 X_1) + (x_2 Y_2 - y_2 X_2) + \dots + (x_n Y_n - y_n X_n)$$

$$* = \sum_{r=1}^n (x_r Y_r - y_r X_r) = \text{مجموع لينة لينة حول } 0$$

معرفة أنه متدار R واتجاهي لوسق، لا موضع نقطة لوضعية 0
حيث لينة لينة دراج M يتغير عندما تتغير موضع النقطة 0 إلا أنه
يكون $R=0$ (أي عندما تتحول الحيدة إلى ازدواج) نقطة لينة
لينة لينة دراج ثابت وغير مرتبط بأي نقطة في المستوى.
وعندما تصادفنا الحالة المختلفة لينة :

$$R \neq 0, M \neq 0$$

في هذه الحالة يمكن استبدال لينة R ولينة دراج M بـ R و M

في نقطة أخرى 0 ، لا يسهل $\frac{M}{R}$ من 0 ونجد أن تتحول الحيدة إلى قوس ولينة

$$R \neq 0, M = 0$$

أي أنه الحيدة آتت إلى قوس واصل ومن هذا أنه لينة 0 تصادف اتجاهها
في كل محل لينة العاصم المائلة للمحور

$$R = 0, \quad M \neq 0$$

أي أنه المجهولة مكاناً ازدياداً لمزده M ونصف الجان يكونه المبدع الجدي
لنرمز تده المجهولة حول أي نقطة في مستوى كابت رياضي M .

$$R = 0, \quad M = 0$$

ولذا نغناه أنه القوة متزنة .

فإنه يانه أي مبدعة به القوى المتوية إما أنه تكونت تحت واهية
أو ازدياداً أو متزنة .

$$R = 0, \quad M = 0$$

في حالة الاتزان يكونه

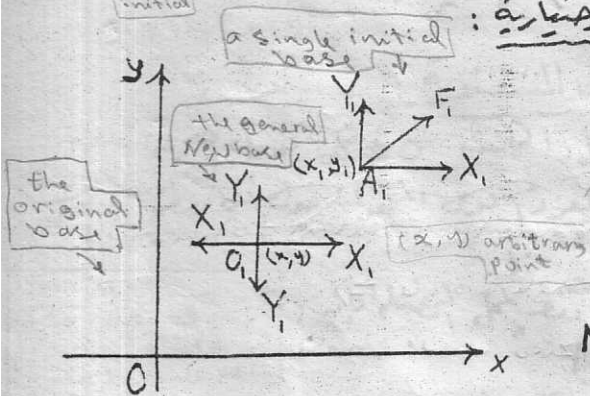
أي يكونه :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad M = 0$$

فإنه شرط الاتزان مبدعة به القوى المتوية .

new base
initial
new base

تغير لزم الازدياد بتغير النقطة الإحداثية :



فإنه لنبدأ به أنه مبدعة لقوى :

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

فإنه 0 إلى تحت R وازدياداً

لرياضي M مبدعة :

$$M = \sum_{r=1}^n (x_r Y_r - y_r X_r)$$

فإنه أفضنا نقطة أخرى $O_1(x, y)$ في مستوى القوى وأريد اقتزال المبدعة فدها
فإنه فده O_1 فتيه Y_1, Y_2 توازيه لحد إصداره وكنه في اتجاهيه متضاديه
فإنه Y_1 فتيه A_1 فتيه Y_1 فتيه O_1 فتيه O_1 فتيه O_1 فتيه O_1 فتيه O_1

$$\text{initial} = x_1, -x \equiv \text{final}$$

$$Y_1(x_1 - x)$$

$$-X_1(y_1 - y)$$

$$A_1 \text{ فتيه } F_1 \text{ فتيه } A_1 \text{ فتيه } F_1 \text{ فتيه } A_1 \text{ فتيه } F_1$$

$$* Y_1(x_1 - x) - X_1(y_1 - y)$$

gives

gives

二

Look

نحسب النسبة لبقية القوى نجد أنه مجموع القوى كان من O_1 تن R وازدادا لمز M_1 حيث:

$$* R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{r=1}^n X_r$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{r=1}^n Y_r$$

$$M_1 = \sum_{r=1}^n [Y_r(x_r - x) - X_r(y_r - y)]$$

$$= \sum_{r=1}^n (x_r Y_r - y_r X_r) - x \sum_{r=1}^n Y_r + y \sum_{r=1}^n X_r$$

"New" "original" $M_1 = M - xY + yX$ of the new base

حيث R لا تتغير بتغير النقطة الافتراضية بينما يتوقف
مجموع الزدواج على موضع النقطة الافتراضية.

GO TO

معادلة خط حمل موازية لمحور القوى المستوية:

في حال أي نقطة من القوى المستوية إذا كانت $R \neq 0$ نؤثر الجبهة

تحت دامت ويكونه المجموع الجبري لقوى الجبهة حول أي نقطة
نقطة خط حمل موازية لهذا

on base z)
R to, M to $\Rightarrow$
reduce to R act at
C at a distance M/R
 $\Rightarrow$ apply (R, y) on the
single force R
makes $M_1 = 0$

* P كانت (x, y) أي نقطة من خط حمل الجبهة فانه:

$$M_1 = 0$$

حيث M_1 مجموع لوزم قوى الجبهة حول P .
وما يتجده يكونه:

$$M - xY + yX = 0$$

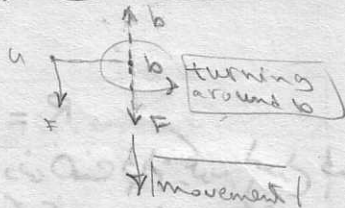
ولكن هي معادلة خط حمل الجبهة.

حيث M لينة تمثل مجموع لوزم لكانت الجبهة من القوى
المستوية حول نقطة الأصل.

i.e. introduce $\neq$ at 0
i.e. apply

(1)

thus
Force $\Rightarrow$
transferred
to b

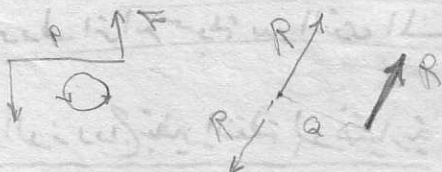


i.e. $\equiv$ Force + Couple of the 1st Force

(2)

at A $F \equiv R$ or $a + \text{Couple} \xrightarrow{\text{gives}} F \equiv \text{Force at a distance } M/R$ at B

So as to the new force have a moment about A $\equiv M$



$$M = F \cdot P = RQ \Rightarrow$$

$$Q = M/R$$

if we want to reduce the (resultant $\neq 0$) and the M Couple into a single Force $\Rightarrow$

Look M_1 must equal zero i.e. we choose an appropriate (x, y) so as to

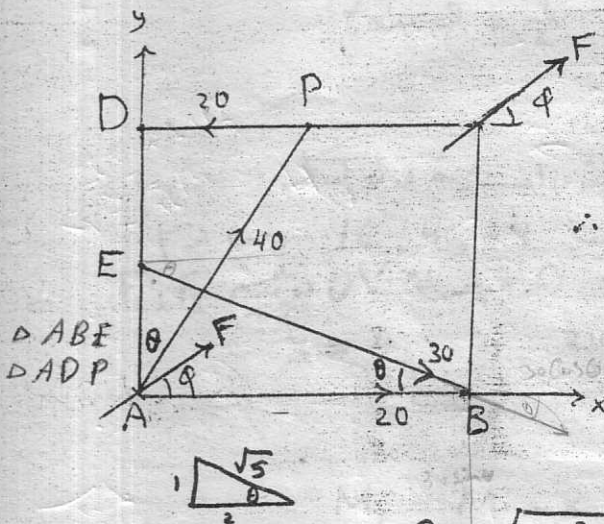
$$M_1 = M - xY + yX = 0$$

which means the new force always lie on the line of action of the reduced Resultant and Couple into a single resultant

مثال (١١):

مثال (١١):

ABCD لوحة مربعة الشكل طول ضلعها $2a$. انقلنا E, P هاتين نقطتين
على AD, CD بالترتيب. اوتت القياس $20, 20, 40, 30$
ساعات القياس في الاتجاهات AB, CD, AP, EB بالترتيب.
محصلة القياس كذلك مارة في كل لحظة بالنسبة للحرية
التي ايضا مارة باتجاه تدريجي متزايد متوازنيته لثلاثة في A, C
نظامنا مبدئية القياس السابقة.



سواء AB سماء الساعات

AD سماء الساعات

$$X = 20 - 20 + 30 \cos \theta + 40 \sin \theta$$

$$= \frac{60}{\sqrt{5}} + \frac{40}{\sqrt{5}} = \frac{100}{\sqrt{5}}$$

$$Y = -30 \sin \theta + 40 \cos \theta$$

$$= -\frac{30}{\sqrt{5}} + \frac{80}{\sqrt{5}} = \frac{50}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{\left(\frac{100}{5}\right)^2 + \left(\frac{50}{5}\right)^2} = 50$$

كذلك ناه:

$$M = 20 \cdot 2a - 30 \sin \theta \cdot 2a = 40a - \frac{60}{\sqrt{5}}a$$

سواء في كل لحظة هي:

$$M - xY + yX = 0$$

$$\therefore (40a - \frac{60a}{\sqrt{5}}) - x \frac{50}{\sqrt{5}} + y \frac{100}{\sqrt{5}} = 0$$

$$5x - 10y + (6 - 4\sqrt{5})a = 0$$

اتجاه الحركة يمنع مع x زادت قليل y ان قليل $\frac{1}{2}$
القيمة ان لثلاثة F, F لثلاثة بالكل نظامنا لثلاثة:

نظام القوى المتزنة (٢٤)

مجموع المركبات المتزنة لا فرق = المركبة المتزنة

$$\therefore 2F \cos \phi = \frac{100}{\sqrt{5}}$$

$$2F \sin \phi = \frac{50}{\sqrt{5}}$$

بالتربيع والجمع

$$\therefore 4F^2 = \left(\frac{100}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$\therefore F = 25$$

$$\tan \phi = \frac{1}{2}$$

مثال (٢٥):

نظام القوى المتزنة متزنة مع القوى المتزنة حول نقطة
 (0,0), (1,4), (4,-4), (16,0) هي النقاط المتزنة
 F₁, F₂ هي القوى المتزنة

$$x = 4, \quad 2y = x - 4$$

$$F_1, F_2$$

نظام متزان - كل

النقطة:

$$M_1 = M - xY + yX$$

$$M = 16$$

$$\therefore (M_1)_{1,4} = 4 = 16 - Y + 4X$$

$$(M_1)_{4,2} = -4 = 16 - 4Y + 2X$$

$$\therefore 4X - Y + 12 = 0$$

$$2X - 4Y + 20 = 0$$

منها نجد أن:

$$\therefore X = -2; \quad Y = 4$$

$$\therefore R = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

$$\tan^{-1}(-2)$$

وأيضا هو صانع مع محور x زاوية

سارے خط میں ایسا ہی :

$$M - xY + yX = 0$$

$$16 - 4x - 2y = 0$$

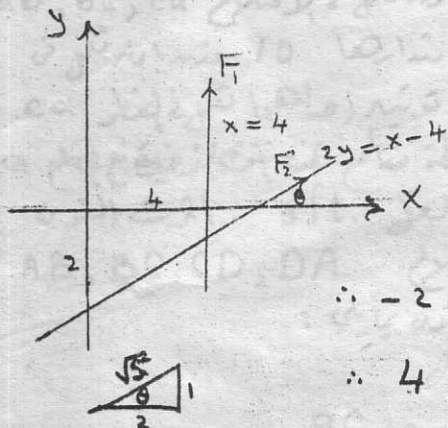
$$2x + y - 8 = 0$$

51

سكن البار

بما ان F_1, F_2 كانا له لحيه

212



$$X = -2 = F_2 \cos \theta$$

$$Y = 4 = F_1 + F_2 \sin \theta$$

$$\therefore -2 = \frac{2}{\sqrt{5}} F_2 \quad \therefore F_2 = -\sqrt{5}$$

$$\therefore 4 = F_1 - \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore F_1 = 5$$

اصدار خط العدل

والله بالنسبة لغيره لغيره مختلف فكانه $g(x)$

مجموع فزوم سببیه به القوی المستوی حول النقطه $(0,0)$ ، $(a,0)$ ، $(-a,2a)$ هي $2h$ ، $-4h$ ، $8h$ به ردات لغز . اربعه مقدار لمصله وبعاله
فقط لمطل ربييه بلهينه افند الفزوم حول النقطه $(\frac{2}{3}a,0)$ ايمه شخ هك لنقطه .
ثروت قوی مقدار كل منها 5 دزده باره تكل في الاضلاع ab ، bc ، cd
به مربع طول ضلع 8 اقدام بنياتق مقدارها 10 دزده باره تكل في
الضلع da . افند هك المبدئه الى القويه اصداها تكل في لغز ca
والقويه توازي القوه db واربعة نقطه تقاطع هك لغز في الضيق مع لغز ba
 $ABCD$ لده مربعه لشكل طول ضلعه 3 ft . اثرت القوي
1، 2، 3، 4 به ردات لغز في الاضلاع AB ، BC ، CD ، DA
في القوي . استبدل سببیه لغز بياي :

(ا) ثقت لغز A وازدواج جرد

(ب) ثقت لغز A وافر تكل في BC

(ج) ثقت لغز B وافر تكل في BC

$abcd$ مربع اثرت لغز F ، 3، 2، 4، 3، 2، 3 في

الاضلاع ab ، cb ، cd ، ad ، db في انماضه الى كيد دها ترتيب لغز

ليه مقدار F كي ثور المبدئه الى ازدواج

ثروت سببیه به لغز في مستوي المربع $abcd$ فاذا كان مجموع فزوم هك

المقدور فول a ، b ، c هي لغز ترتيب M_1 ، M_2 ، M_3

ناجته انه مجموع لغز وسط حول d هو : $M_1 - M_2 + M_3$

اثرت سببیه به لغز في مستوي المربع $abcd$ فاذا كان مجموع فزوم هك لغز

حول النقطه $(3,0)$ ، $(0,1)$ ، $(2,4)$ هي 10، 20، 30

في الترتيب نا وبعدها فقط لمصله .

ثروت ثروت لغز F_1 ، F_2 ، $\frac{1}{\sqrt{2}}F_3$ في اضلاع لغز المربع

في استقامت $x+y=1$ ، $y-x=1$ ، $y=2$ فاذا كان مجموع فزوم ثروت

في انماض لغز واحد . نا جته انه مقدار فقط لمصله هي :

$$(F_2 - F_1)x - (F_1 + F_2 - F_3)y + F_1 + F_2 - 2F_3 = 0$$

ائتئى ئىككى تىرى F_1, F_2, F_3 نى لىۋىيىخ ab, bc, ca
 بىر تىرىپ بازا ئامانەت بىر كىيە لىيەلە نى ايتىما لىيەلە لىيەلە ھى 2 دىيەلە
 دىيەلە لىيەلە لىيەلە ھى
 $x + y - 14 = 0$
 F_1, F_2, F_3 دىيەلە لىيەلە دىيەلە لىيەلە

تعريف :

زاوية الاحتكاك :

تدعى زاوية الاحتكاك بالزاوية بين رد الفعل العمودي و رد الفعل المحصل
إذا كانت R هي رد الفعل العمودي .

μR هي قوة الاحتكاك التلقائي .

حيث μ هو معامل الاحتكاك .

$$\sqrt{\mu^2 R^2 + R^2} = \text{رد الفعل المحصل} \\ = R \sqrt{1 + \mu^2}$$

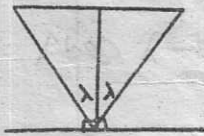
وبنوع رد الفعل المحصل زاوية λ مع رد الفعل العمودي حيث :

$$\tan \lambda = \frac{\mu R}{R} = \mu$$

وهذه هي زاوية الاحتكاك يساويها معامل الاحتكاك .

مخروط الاحتكاك :

إذا تم رسم سطح مخروطي كالمثلث واعتبرنا كل اتجاهات
محتملة للكرة فبالتأخر أنه في حالة الاحتكاك التلقائي لا بد
أن يقع رد الفعل المحصل بين سطح مخروط والجزء الزاوية
التي تسمى λ حيث λ زاوية الاحتكاك .



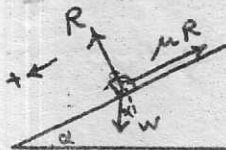
بما أن هذا المخروط بمخروط الاحتكاك وإذا لم يقع الاحتكاك تسمى الزاوية
تسمى رد الفعل المحصل يقع داخل المخروط .

التمرين :

مثال (١) :

إذا وضع جسم على مستوى مائل فسيكون رد الفعل العمودي تحت تأثير وزنه نقطة
مركز ثقله فبالتأخر يجب أن يقع رد الفعل تحت زاوية الاحتكاك .

الحل :



بما أن رد الفعل التلقائي عند مركز ثقل الجسم لا بد أن يكون تحت تأثير وزنه الجسم
فبالتأخر يجب أن يقع رد الفعل تحت زاوية الاحتكاك .

بما أن رد الفعل العمودي R هو معامل الاحتكاك .

$$\frac{W}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{\sin (90 + \alpha)} = \frac{\mu R}{\sin (180 - \alpha)}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\operatorname{cosec} \theta \sin \theta = 1$$

$$\sec \theta \cos \theta = 1$$

$$\cot \theta \tan \theta = 1$$

$$1) \cot(90 - \theta) = \tan \theta$$

$$2) \cot \lambda = \frac{1}{\tan \lambda}$$

$$3) \sin(90 + \theta) = \cos \theta$$

$$4) \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$5) \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda = \cos 2\lambda$$

$$6) \sin 2\lambda = \sin \lambda \cos \lambda$$

$$7) \sin(90 - \theta) = \cos \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)$$

$$\frac{1}{\tan \theta} = \cot \theta$$

$$\frac{1}{2} = \tan \lambda$$

$$\frac{1}{2} = \tan \lambda$$

$$1 - \cos^2 \lambda = \sin^2 \lambda$$

$$\frac{1}{2} = \tan \lambda$$

$$\tan 90 - 90 = 0$$

حلقة

الانقلاب اولاً $\mu < \frac{24}{h}$

الانقلاب اولاً $\frac{24}{h} < \mu$

4. الذي شرطه يتوزع اولاً هو $\textcircled{1}$ $\textcircled{2}$ $\textcircled{3}$ $\textcircled{4}$ $\textcircled{5}$ $\textcircled{6}$ $\textcircled{7}$ $\textcircled{8}$ $\textcircled{9}$ $\textcircled{10}$ $\textcircled{11}$ $\textcircled{12}$ $\textcircled{13}$ $\textcircled{14}$ $\textcircled{15}$ $\textcircled{16}$ $\textcircled{17}$ $\textcircled{18}$ $\textcircled{19}$ $\textcircled{20}$ $\textcircled{21}$ $\textcircled{22}$ $\textcircled{23}$ $\textcircled{24}$ $\textcircled{25}$ $\textcircled{26}$ $\textcircled{27}$ $\textcircled{28}$ $\textcircled{29}$ $\textcircled{30}$ $\textcircled{31}$ $\textcircled{32}$ $\textcircled{33}$ $\textcircled{34}$ $\textcircled{35}$ $\textcircled{36}$ $\textcircled{37}$ $\textcircled{38}$ $\textcircled{39}$ $\textcircled{40}$ $\textcircled{41}$ $\textcircled{42}$ $\textcircled{43}$ $\textcircled{44}$ $\textcircled{45}$ $\textcircled{46}$ $\textcircled{47}$ $\textcircled{48}$ $\textcircled{49}$ $\textcircled{50}$ $\textcircled{51}$ $\textcircled{52}$ $\textcircled{53}$ $\textcircled{54}$ $\textcircled{55}$ $\textcircled{56}$ $\textcircled{57}$ $\textcircled{58}$ $\textcircled{59}$ $\textcircled{60}$ $\textcircled{61}$ $\textcircled{62}$ $\textcircled{63}$ $\textcircled{64}$ $\textcircled{65}$ $\textcircled{66}$ $\textcircled{67}$ $\textcircled{68}$ $\textcircled{69}$ $\textcircled{70}$ $\textcircled{71}$ $\textcircled{72}$ $\textcircled{73}$ $\textcircled{74}$ $\textcircled{75}$ $\textcircled{76}$ $\textcircled{77}$ $\textcircled{78}$ $\textcircled{79}$ $\textcircled{80}$ $\textcircled{81}$ $\textcircled{82}$ $\textcircled{83}$ $\textcircled{84}$ $\textcircled{85}$ $\textcircled{86}$ $\textcircled{87}$ $\textcircled{88}$ $\textcircled{89}$ $\textcircled{90}$ $\textcircled{91}$ $\textcircled{92}$ $\textcircled{93}$ $\textcircled{94}$ $\textcircled{95}$ $\textcircled{96}$ $\textcircled{97}$ $\textcircled{98}$ $\textcircled{99}$ $\textcircled{100}$

رأى فأنه قد / سبب بعد هذا الضلال الاثر

رأى فأنه قد / سبب بعد هذا الضلال الاثر



$$F \cos \alpha > w \sin \alpha + \mu F \sin \alpha + \mu w \cos \alpha \quad : \text{أ} \quad$$

$$F (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) > w \sin \alpha + \mu w \cos \alpha \quad : \text{أ} \quad$$

$$F > \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} w \quad \dots (1)$$

فهمالة المتغير يكونه الشرط هو:

$$2\alpha \cdot F \cos \alpha > w \sin \alpha \cdot \alpha + w \cos \alpha \cdot \alpha$$

حيث 2α طول ضلع المربع

$$F > \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} w \quad \dots (2) \quad \text{الشرط المتغير هو:}$$

مع (1) و (2) نستنتج أنه لا يمكن أن يتقلب بين أن يتحرك إذا $\mu < 1$:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} w < \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} w$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{2(\frac{4}{5})} < \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mu}{\frac{4}{5} - \mu \frac{3}{5}}$$

$$\frac{7}{8} < \frac{3 + 4\mu}{4 - 3\mu}$$

$$\therefore 28 - 21\mu < 24 + 32\mu$$

$$\therefore \mu > \frac{4}{53}$$

الحد الأدنى

(١) كل من منتظم يرتكز على دائرة رأسه ليس بمركزه يكون مركزاً على طرفي الدائرة
 دائرة مركزه المركز على مركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 حيث 2α طول الدائرة فإذا لم يكن الدائرة بزاوية 60°
 نأخذ أنه حال الدائرة ليس له $(3\sqrt{3}/13)$

(٢) يرتكز كل من زوايا b, c على دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 نصفها الدائرة b على دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 نصف دائرة c نأخذ أنه ليس له دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة إذا وجد دائرة يكون مركزه دائرة c دائرة أيضاً حال الدائرة إذا
 لم يكن أكبر زاوية يكون دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه

(٣) كل من منتظم دائرة w يرتكز على دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه



(٤) نصف منتظم طول α يرتكز على دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 نصف دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه

$$\tan \theta = \frac{2 \sin 2\lambda}{1 + 2 \cos 2\lambda}$$

حيث θ زاوية من القوس على الدائرة، λ زاوية الدائرة

(٥) مركز دائرة قائم يرتكز على دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه

(٦) نصف دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه
 دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه دائرة رأسه ليس بمركزه

الباب الخامس

الشدة في الخيوط المرنة

Tension in elastic strings.

قانون هوك للشدة في الخيوط المرنة :

نلاحظ ان فرضنا ان الخيط غير مرنة أي انه قابل للاستطالة أو مرن آخر يانه طول ثابت سواء كانت قوة الشد دنيئة أو كبيرة في الواقع يانه كل الخيوط على مرنة تختلف من حيث كثرة تبعاً لنوع المادة المصنوع منها الخيط . وفي حالات السابقة كانت الاستطالة في الخيط صغيرة جداً ولذا كنا نخلط . أما إذا كانت الاستطالة ليست لدرجة إهمال يانه توجد علاقة بين الشدة المضافة (الشدة) في الخيط والاستطالة الناتجة فقط . هذه العلاقة تسمى بقانون هوك Hooke's Law للشدة في الخيوط المرنة وهو قانون تجريبي يصح لهذا القانون بل أنه " الشدة في خيط مرنة تتناسب مع استطالة الخيط ولكن مع طول الخيط الطبيعي "

بإذن افرضنا أن طول الخيط قبل الاستطالة هو l_0

أما طول الخيط بعد الاستطالة هو l

الاستطالة هي $(l - l_0)$

إذاً الشدة في الخيط هو T ثابته :

$$T = \frac{\lambda}{l_0} (l - l_0)$$

حيث λ ثابت يسمى معامل المرونة للخيط modulus of elasticity

متكونة من λ إلى نوع المادة المصنوع منها الخيط وعلى مساحة مقطع . وهو مقدار القوة التي تؤثر في الخيط إذا أثرت فيه قوة مرنة أحدثت فيه استطالة بقدر طول الخيط الطبيعي . قانون هوك كما ينبغي أن يكون في المرونة من جهة الاستطالة .
وهو كانت سرعة الخيط هناك حد معين للاستطالة يتبع فيه الخيط لقانون هوك .

$$2h > 2c$$

سؤال (3):

خيط مرنة يصل طرفاه نقطتين في مستوى أفقي وامتد البعد بينهما $2h$ فإذا كان الطول الطبيعي للخيط $2c$ وكانت λ سرعة الموجة ثم ربط جسم وزنه w لمنتهى الخيط، أثبت أنه الزاوية θ التي يصنعها كل من جزأي الخيط مع الرأس هي متقاربة السرعة:

$$\frac{w}{2\lambda} \tan \theta + \sin \theta = \frac{h}{c}$$

الحل:

الرسم متحالا

دافعنا من القماش أنه ليس فيه في

الخيطية AD, BD متساوية.

ولكنه كل منهما T

الكل يبيد الوضع الذي في حالة التوازن.

بالتقريب أيضا:

$$\therefore w = 2T \cos \theta$$

$$T = \frac{w}{2 \cos \theta} \quad \dots (1)$$

وكيفه من قانونه حول نجد أنه:

$$T = \frac{\lambda}{c} (\overline{AD} - c)$$

$$= \frac{\lambda}{c} \left(\frac{h}{\sin \theta} - c \right) \quad \dots (2)$$

من (1)، (2) نستنتج أنه:

$$\frac{w}{2 \cos \theta} = \frac{\lambda}{c} \left(\frac{h}{\sin \theta} - c \right)$$

دفعنا بطريقه في $\frac{\sin \theta}{\lambda}$ نجد أنه:

$$\frac{w}{2\lambda} \tan \theta + \sin \theta = \frac{h}{c}$$

هو المطلوب.

ABC سلسله سه بعده را با سه نقطه ثابت A، B، C رها شده
 نقطه A را با سلسله سه بعده و در آنجا $2W, W$ به ترتیب قرار داده شده است
 سلسله سه بعده $3W$ تا در آنجا به سلسله سه بعده بعد از سلسله سه بعده
 قبل از سلسله سه بعده.

الحل:

نقطه A، B، C را با سلسله سه بعده
 قبل از سلسله سه بعده.

در آنجا x, y طول سلسله سه بعده است
 و T, T_1 به ترتیب به سلسله سه بعده.

در آنجا تا در آنجا به سلسله سه بعده.

$$T = \frac{\lambda}{c} (x - c) = \frac{3W}{c} (x - c)$$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c_1} (y - c_1) = \frac{3W}{c_1} (y - c_1)$$

در آنجا تا در آنجا به سلسله سه بعده.

در آنجا تا در آنجا به سلسله سه بعده.

$$T_1 = W$$

$$T = T_1 + 2W$$

$$\therefore T = 3W$$

در آنجا تا در آنجا به سلسله سه بعده.

$$3W = \frac{3W}{c} (x - c)$$

$$\frac{3W}{c} (x - c) = 3W$$

$$\therefore x - c = c$$

$$\therefore x = 2c$$

$$\frac{3W}{c_1} (y - c_1) = W$$

$$3y - 3c_1 = c_1$$

$$\therefore y = \frac{4}{3} c_1$$

در آنجا تا در آنجا به سلسله سه بعده.

تكملة

(١) جسم موضوع لا يستقر على حثته ميل لا الدفق بزاوية α حيث $\alpha > \lambda$ (λ هو زاوية الاحتكاك) وضع الجسم على الدفق لانه بواسطة
خط مرده يصل احد طرفيه بالجسم والآخر ينطبق في الحثته المائل بازا
كانه حال المرونة يارى وزنه الجسم فاجبت انه في وضع الاتزان يتحقق
الخط نقطة $\lambda \csc(\alpha - \lambda) \sin \alpha + 1$

(٢) ثبت لفرع خط مرده في تقطيعه في سكون انفق واحد المائل بينهما
تأخر الطول الطبيعي للخط ثم ربط في منتصفه جسم وزنه w فكانت
الزاوية بين جزأي الخط في وضع الاتزان 60°

اثبت انه حال المرونة يارى $\frac{w}{\sqrt{3}}$
(٣) قضيب منتظم طول l_1 وزنه w يتحرك دون فرك في احد طرفيه . ربط
طرفه الآخر بخيط مرده يمتد نقطة ثابتة تقع رأسيا على المائل المضيء وللمرء l_2
منها بازا كما هو الحال الطبيعي للخط l_2 فكانت مرونته بحيث انه طوله يزدل
الى l_1 اذا اثرت فيه قوة قدرها w . اثبت انه في وضع الاتزان يصنع
القضيب مع الرأس زاوية قدرها $\frac{l_2}{l_1 + l_2} \sin 2$ رأسه لشد في الخيط
يارى $\frac{l_2}{l_1 + l_2} w$

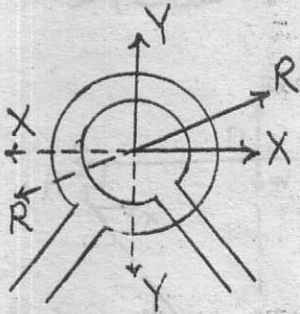
(٤) قضيب منتظم لوله l يرتكز بطرفه A على ارضه انقصة طلاء
بطرفه B على حائط رأسى المائل ويمتد من الدفق لانه خط مرده AC
انفق مثبت منه A وحيث BC رأسى فانزله القضيب بحيث يصنع
مع الدفق زاوية $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ نازا المائل انه حال المرونة الخيط يارى $\frac{4}{9}$ سه طوله للقضيب
 $\frac{5}{6}$ سه وزنه للقضيب فاجبت انه الطول الطبيعي للخط يارى $\frac{4}{9}$ سه طوله للقضيب

(٥) قضيب مرده حال مرونته $4w$ وعلته رأسيا في نقطة ثابتة A . ربط
بالخيط منه كل سه B, C وزنه منه w كما هو الحال الطبيعي لكل سه AB, BC
هو α . اثبت انه في حالة الاتزان يكون لوله AB, BC سه لا يستقر
هنا $\frac{3}{2} \alpha, \frac{5}{4} \alpha$ على التوالي

الباب السادس

المفاصل الملساء Smooth hinges.

١ تعريف وملاحظات :



المفصلة الملساء لها سطح مسطح اسطواني
يدور حول محور اسطوانية في المصباح بحيث
يدور كل جسم من المصباح حول المحاور
أي أشكال . وتبين بذلك رد فعل المسار
على أي جسم من المصباح المفصلة ببساطة بواسطة
المفصلة إلى قف واحدة تمر بمركز المسار .

وإذا اتصل بالمفصلة المسار جسمان فقد يكون تأثير المفصلة على جسميه
مماثل مع قوتيه متساويتيه في المقدار ومتضادتيه في الاتجاه كما في الشكل
وهو حل مسائل المفاصل الملساء يلاحظ ما يلي :

١١ يمكن تمثيل رد فعل المفصلة في مركبتيه في اتجاهيه متعاكسيتين كما في الشكل .
وذلك أن الزاوية الزاوية المكونة من المصباح المفصلة ببساطة بواسطة المفاصل
كوصلة ثم ندرس اثرانه لكل جسم على حدة .

١٢ إذا كانت قضبانها الزاوية متساوية وكان كل جسم من الزاوية والقوى المؤثرة عليه
متماثلة بالنسبة إلى خط يمر بمركزها من المفاصل فإنه ردود أفعال
لكل المفاصل تكون متساوية في المقدار وهذا واضح من التماثل .

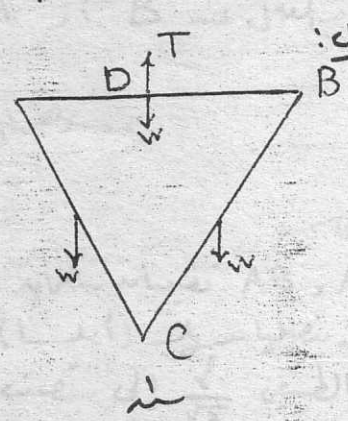
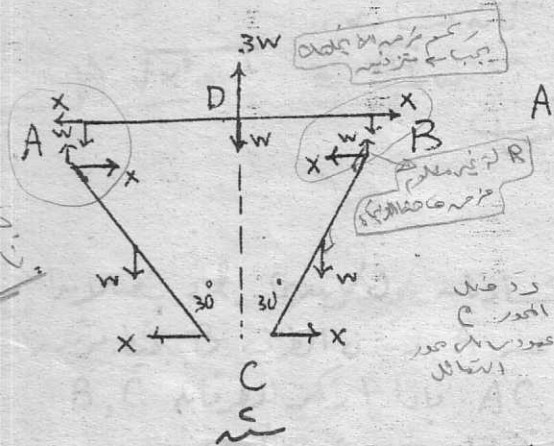
١٣ لهذا تكون قضبانها الزاوية على أن بعضها متساوية ولديها تأثير على أي قضيب
من القضبان المتساوية سوى رد فعلها المتساوية المتساوية فإنه لا اثر
يجب أنه يعمل رد الفعلية في اتجاه القضيب ويكونا متساويين في
المقدار ومتضادين في الاتجاه .
يتبين من ذلك أن المفاصل الملساء

در این مسئله، هر دو اتصال را به هم وصل می‌کنیم و در آن نقطه، نیروی واکنشی را می‌یابیم.

۴) مسئله

شکل (۱۱):

در مسئله، یک سیستم متناهی از اجزای در طول یک خط مستقیم قرار دارد. فرض می‌کنیم که یک نیروی عمودی w در نقطه A وارد می‌شود. با فرض اینکه در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم. اگر فرض کنیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم. اگر فرض کنیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم.



شکل (۱۱) به یک سیستم متناهی از اجزای در طول یک خط مستقیم قرار دارد. فرض می‌کنیم که یک نیروی عمودی w در نقطه A وارد می‌شود. با فرض اینکه در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم.

می‌دانیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم. اگر فرض کنیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم.

$$T = 3w$$

همان‌طور که می‌بینیم، در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم. اگر فرض کنیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم. اگر فرض کنیم که در هر نقطه w وارد می‌شود، می‌توانیم نیروی واکنشی را در نقطه C پیدا کنیم.

المجابه اثراته القضيبي BC دافذ المزدحم حول B بنصفه $2h$ طول
القضيبي $2h$ يانه:

$$x \cdot 2h \cos 30^\circ + w h \sin 30^\circ = 0$$

$$x \sqrt{3} = -\frac{w}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{w\sqrt{3}}{6}$$

دلائل لالة معانها x نهيكس اديناه المفروضه بالرسم.
انما رد الفعل منه B او A يانه يادي:

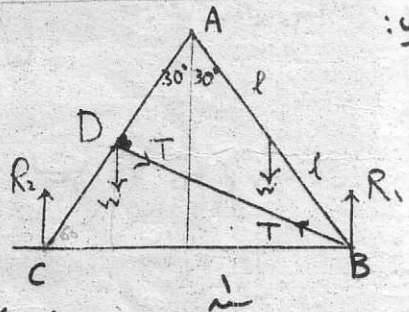
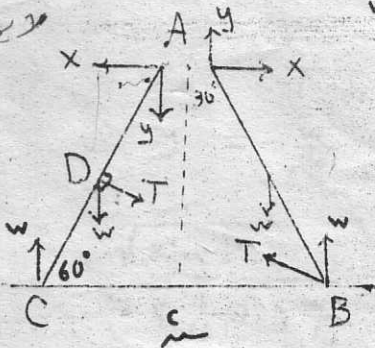
$$\sqrt{x^2 + w^2} = \frac{\sqrt{39}}{6} w$$

دفع المزدحم

ناله (٦٥)

AB, AC قضيباه تنظمه بتادايه طول كل منهما $2l$ يتصلوه
نقال قضيبا سلك (ألسا) منه A ريشن الطرف B بنقطه
طوله الطبيعي $\frac{l}{\sqrt{3}}$ إلى نقت AC نازا اركز الطرف B, C
على مسده انق املس دكاه القضيباه في مسده رأس واحد
دP في $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ نأدبلسه في الجنبه دسكال المرونة دكس
ردنن المنقل A بولن دزبه قضيب w

مروجه حركاتي



سك يسيه الذره المرونة على الوكيل كوصف.
بدراسته اثراته الوكيل ككل نه انه:

$$R_1 + R_2 = 2w$$

رباقت المزدحم حول B نه انه:

$$3wl \cos 60^\circ + wl \cos 60^\circ - R_2 4l \cos 60^\circ = 0$$

$$4R_2 = 4w \quad \therefore R_2 = w = R_1$$

رأى أنه $\triangle ABC$ متساوية الأضلاع

وبما أن BD يكون عموديا على AC

وبما أن AC رأفة الزخم حول A نجد أنه:

$$Tl + wl \sin 30^\circ - w 2l \sin 30^\circ = 0$$

$$T = \frac{w}{2}$$

نلاحظ أن الشكل يتبين أنه مثل قائم الزاوية BD مع AC مستقيم هو:

$$BD = 2l \sin 60^\circ = l\sqrt{3}$$

وبما أن AC رأفة الزخم حول A نجد أنه:

$$T = \frac{\lambda}{\frac{l}{\sqrt{3}}} \left(l\sqrt{3} - \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \lambda (3 - 1) = 2\lambda$$

$$\therefore \frac{w}{2} = 2\lambda$$

$$\therefore \lambda = \frac{w}{4}$$

وبما أن AC رأفة الزخم حول A نجد أنه:

$$\therefore x = T \sin 60^\circ = \frac{w}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} w$$

وبما أن AC رأفة الزخم حول A نجد أنه:

$$\therefore y + w + T \cos 60^\circ = w$$

$$\therefore y = -\frac{w}{4}$$

$\therefore$ نلاحظ أن A رأفة الزخم حول A نجد أنه:

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{16} w^2 + \frac{w^2}{16}}$$

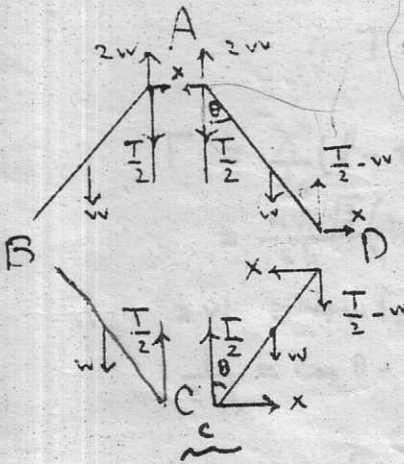
$$= \frac{w}{2}$$

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

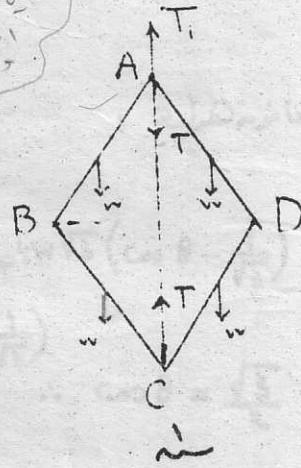
مثال (٣): عتلا ههههه

سبه $ABCD$ بكونه سه اربعة تضبيه منتظمة طول كل ضلع h ووزنه w تنقسم بقطر اتصاله منتظيا انازا اذا وصل سبه A, C بنظير سبه طولها الطبيعي $\frac{2h}{\sqrt{3}}$ وصال سرنه $4w$ اتم ملقت السرنه سبه A اربع مقدار الزاوية CAB في حالة الاتزان وكذا من اربع ردد افعال المتناسل.

الحل:



يكنية له تضبيه
اعقوبه
وتمنع عرطه
سبه



ندرس اذله الاتزان الوكل كومت.

ولنضه انه تق التعليه سبه A هه T_1 ولسه في ليل AC هو T الترم المثلث لسه لسه بنيه في سبه

بالليل لاسيا نمده انه:

$$T_1 = 4w$$

ايم ندرس سبه ذلك الاتزان كل تضبيه لسه مت.

واضحه انه AC كومت عائل الوكل ولله المثلث عليه ولسه في

ضه T بوتر ل AB والفت التفر بوتر ل AD وكذا ل ل ل ل D .

ايمانه التائل كونه رددل المثلث C لدريا ل كومت التائل وليكه x

كالموسيه في سبه. كذا T_1 توضع بالتدري ل AB, AD

براسه الاتزان تضبيه AD بالليل انظيا وراسيا بكونه التولى

المثلث عليه كانه سبه.

رباذا الترم طول D نمده انه:

(٦٧)

$$w \frac{h}{2} \sin \theta + \frac{T}{2} \cdot h \sin \theta + x h \cos \theta - 2w h \sin \theta = 0$$

$$\therefore w + T + 2x \cot \theta - 4w = 0$$

$$\therefore T + 2x \cot \theta - 3w = 0 \quad \dots (1)$$

رابطه انتزاع CD، وافت الزم حول D ندهد:

$$x h \cos \theta + w \frac{h}{2} \sin \theta - \frac{T}{2} h \sin \theta = 0$$

$$T - 2x \cot \theta - w = 0 \quad \dots (2)$$

جمع (1) و (2) ندهد:

$$2T = 4w$$

$$\therefore T = 2w$$

رابطه تناوب حول:

$$T = \frac{\lambda}{l_0} (l - l_0)$$

$$= \frac{4w\sqrt{3}}{2h} \left(2h \cos \theta - \frac{2h}{\sqrt{3}} \right) = 4w\sqrt{3} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore 2w = 4w\sqrt{3} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

این را در وضع التوازن بکنیم:

$$\angle CAD = \angle CAB = 30^\circ$$

رابطه (1) ندهد:

$$2w + 2x\sqrt{3} - 3w = 0$$

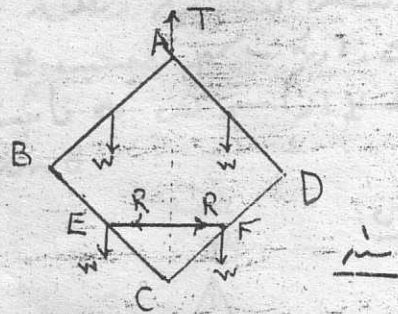
$$\therefore x = \frac{w}{2\sqrt{3}}$$

$\therefore$ ردیف المنص C بای $\frac{w}{2\sqrt{3}}$ انتبا في ارتفاع

البیة بالسم.

رکزیه ردیف المنص = B = ردیف المنص D = $\frac{w}{2\sqrt{3}}$

الحل :


$$W a \cos 45^\circ + W \cdot 2a \cos 45^\circ - X \cdot 2a \cos 45^\circ = 0$$

$\therefore x = \frac{3W}{2}$ (مسبب 2، طول كل نصيب)

رسه هم ناه المركبة الرأسية لرد فعل منه D هي w والمركبة الأفقية هي $\frac{3w}{2}$
ومنه التماس تكون المركبة الرأسية لرد فعل منه B هي w والمركبة
الافقية هي $\frac{3w}{2}$ كذلك.

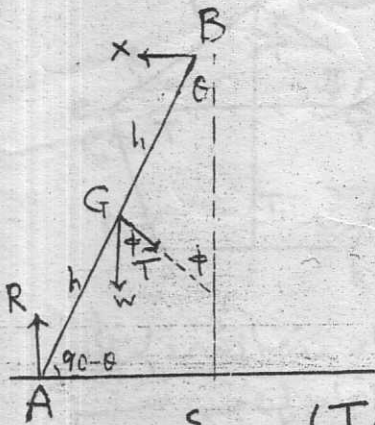
دبر راسته اثر از CD^2 دافد (الغرض حول C نه اند).

$$X \cdot 2a \cos 45^\circ + W \cdot 2a \cos 45^\circ - W a \cos 45^\circ - R a \cos 45^\circ = 0$$

رَبُوعُ مَضَع $x = \frac{3w}{2}$ مُدَانَهُ :

$$R = 4 \, \Omega$$

(v.)



والدالة ندرس اتزان اهتزاز AB تحت
ولننظره أنه رد فعل المصنوع عليه هو X
وهو في الاتجاه الأفقي كما ذكرنا سابقاً.
التوتر الدالة على AB في وضع الاتزان
بينة في سكة

بالنسبة لـ اتزان AB وأخذ العزم حول B
نجد أنه:

$$\sum (T \cos \phi + w) h \sin \theta + T \sin \phi h \cos \theta - R z h \sin \theta = 0$$

بالتقسيم على $h \cos \theta$

$$\therefore (T \cos \phi + w) \tan \theta + T \sin \phi - z R \tan \theta = 0 \quad \dots (3)$$

بالترتيب من (1) ، (2) في (3) على $R < T$ نجد أنه:

$$\left(\frac{w_1}{2} + w\right) \tan \theta + \frac{w_1}{2} \tan \phi - (2w + w_1) \tan \theta = 0$$

$$\frac{w_1}{2} \tan \phi = \left(\frac{w_1}{2} + w\right) \tan \theta$$

$$\therefore \tan \phi = \left(1 + \frac{2w}{w_1}\right) \tan \theta$$

وهذا هو الجواب

"Omitted"

مثال (17):

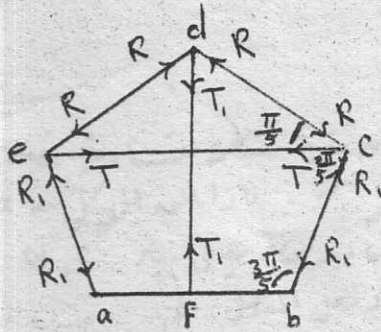
تتمثل نتظم يتكون من خمسة قضبان خفيفة متصلة ببعضها اتصالاً نصفياً سراد
بينما يعمل غيب شدد بيه رأسيه سراد سراد. ولتلق الاتزان وصل
أحد سراد سراد الخامس غيب آخر شدد إلى نصف الغيب المثال بحيث يكون
الغيب متعادله. أثبت أنه لينة بيه لينة في الغيب كنسبة:

$$2 \sin \frac{\pi}{5} : 1$$

وذلك إذا وضع الخمس بأحد أطرافه إلى مستوى أفقي ونزول رأس.

الحل:

$$\frac{3\pi}{5} \leq \text{زاوية بسيطة} \quad (11)$$



نفس الشكل المثلثات T, T_1 في الخطين هما
نفسه أنه T, T_1 في الخطين هما
كأن الشكل.

بما أنه كل نصيب (يدور أنه نصيب) نتره
تحت تأثير توتية عند طرفيه فإنه له تأثير توتية

تكونا في اتجاه الخطين ويكونا متساويين في المقدار ونفادنا في الاتجاه

نكونه رد فعل الخطين إلى سائر الخطين في اتجاه الخطين نفس

رسم تماشى الشكل حول df تكونه القوة المؤثرة في الشكل كما هو مبين بالرسم

وإذا درسنا اثره إلى سائر d نجد أنه نتره تحت تأثير R, R, T_1

كما في الشكل ولذا يكون:

$$T_1 = 2R \cos \frac{3\pi}{10} \quad \dots (11)$$

كذلك مع اثره إلى سائر c وتكون أنقيا به أنه:

$$T = R \cos \frac{\pi}{5} + R_1 \cos \frac{2\pi}{5} \quad \dots (12)$$

وتكون إلى سائر يكون:

$$R \sin \frac{\pi}{5} = R_1 \sin \frac{2\pi}{5} \quad \dots (13)$$

مع (12) و (13) تكون:

$$T = R \cos \frac{\pi}{5} + \frac{R \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} R$$

$$= \frac{\sin \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} R \quad \dots (14)$$

$$\frac{T_1}{T} = \frac{2 \cos \frac{3\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{5}}$$

مع (11) و (14) نجد أنه:

$$= \frac{2 \cos \frac{3\pi}{10} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{3\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}}{\sin \frac{3\pi}{10}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{1}$$

$$\left(\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5} \right) \quad \text{لأنه}$$

تكون الخطين

تجارب

(١) يتكون الربيع $abcd$ من أربعة تضامات منتظمة متساوية أضلاع
بعضها ينصهر مع w و w من كل من w . بإزالة الزوايا α
من كل شكل برأس w برأس w من كل من w برأس w برأس w
نأخذ الشكل في الخط وندار دلتا w و w من كل من w برأس w برأس w

(٢) $abcd$ من أربعة تضامات منتظمة متساوية أضلاع
بعضها ينصهر مع w و w من كل من w برأس w برأس w
نأخذ الشكل في الخط وندار دلتا w و w من كل من w برأس w برأس w

(٣) $ABCD$ من أربعة تضامات منتظمة متساوية أضلاع
بعضها ينصهر مع w و w من كل من w برأس w برأس w
نأخذ الشكل في الخط وندار دلتا w و w من كل من w برأس w برأس w

(٤) شكل خاص منظم $abcde$ مكون من خمسة تضامات منتظمة متساوية
بعضها ينصهر مع w و w من كل من w برأس w برأس w
نأخذ الشكل في الخط وندار دلتا w و w من كل من w برأس w برأس w

(٥) ab, bc تضامات منتظمة متساوية أضلاع
بعضها ينصهر مع w و w من كل من w برأس w برأس w
نأخذ الشكل في الخط وندار دلتا w و w من كل من w برأس w برأس w

(٦) يحل قضيهامه خفيهامه ab, cd طول كل منهما $2h$ بقضيهامه ac منقضيها. وضع القضيهامه ac في مستوى رأس حيث يمتد لخطها ac لا نفسه أبدا كما وضع طرفي رأس في نفس طرفه ac ووزنه w به القضيهامه بحيث يكون متوازي ac وبقضيهامه ac بميل 60° . أوجد المساحة في الخيط.

(٧) قضيهامه منتظمه ac كل منها w وطوله $2a$ يتصل به بعضهما ببعضه ac على أن يترك القضيهامه ac في وضع متساوي لكل من ac على نفس طرفها ac . أثبت أنه كل قضيهامه ac في الخيط بزاوية θ تنطبق بالعلوه:

$$b(\tan^3 \theta + \tan \theta) = a$$

(٨) يحل قضيهامه منتظمه ab, bc طول كل منها $2h$ ووزنه w اتصالا متطابقا طولها $2h$ ووزنه w في مستوى رأس متساويه لوزنها ac في نفس طرفها ac بحيث يكون متوازي ac وبقضيهامه ac بميل 60° . أوجد المساحة في الخيط.

أثبت أنه الزاوية θ بين كل قضيهامه والرأس تعطينا المعادله:

$$\sin^2 \theta \tan \theta = \frac{1 + \lambda}{1 + 2\lambda}$$

وأوجد أيضا رد فعل الخيط.

(٩) يكون الشكل المنتظم $ABCDE$ من قضيهامه خفيهامه BD, CE قضيهامه خفيهامه أيضا. وضعت الجسيمه في مستوى رأس بميل 2 يوازي CD نقضا أفقيا وبعده A ووزنه w . أثبت أنه لن يكون BD في $w \cot \frac{\pi}{5}$.

(١٠) يكون الشكل المنتظم $abcdef$ من قضيهامه منتظمه ac منقضيها ac في نفس طرفها ac في مستوى رأس بميل 2 يوازي CD نقضا أفقيا وبعده A ووزنه w . أثبت أنه لن يكون BD في $w \cot \frac{\pi}{5}$.

(١١) يكون الشكل $ABCD$ من قضيهامه منتظمه ac كل منها w اتصالا متطابقا طولها $2h$ ووزنه w في مستوى رأس متساويه لوزنها ac في نفس طرفها ac بحيث يكون متوازي ac وبقضيهامه ac بميل 60° . أوجد المساحة في الخيط.

أثبت أنه الزاوية θ بين كل قضيهامه والرأس تعطينا المعادله:

$$\sin^2 \theta \tan \theta = \frac{1 + \lambda}{1 + 2\lambda}$$

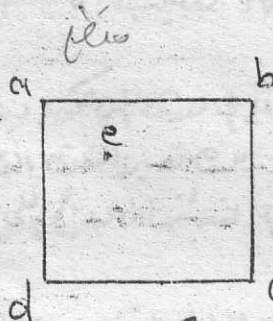
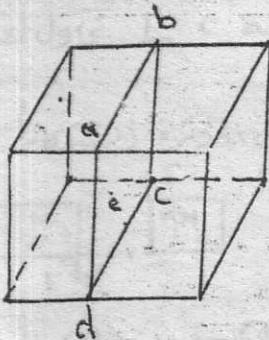
وأوجد أيضا رد فعل الخيط.

الباب السابع

القوة القاصية والعزم الحافى

Shearing Force and Bending Moment.

۱) تعریف :



محمد قزوینی
عمومی و ادبی
تألیفات

نلاحظ اننا في الشكل المادي يكون من الصعب ان نرى ان الشكل المتغير في
الوقت فانه يغير من مادي في الفضاء ومختلف في الزمان في كل نقطة
في جاني القطع $abcd$ لهذا لا يمكن ان نرى
اننا اذا اردنا دراسة التور الدائرية ان نركز في الضيق فعليا دراسة
التور الدائرية "في جاني واحد" نتطرق الى القطع $abcd$.

المرء الذي فيه عيبه فليقبل الى توبته :

إمدادها في آتياه عمودى لم ينلج والأخرى في سدى المطع.

أما البندية التي تقطع منه e مع زيربوتلي منه فإن شغل المتعلق بتكثيره سيجعله منه لتوى
التوازية التي عليه تميل إلى عمودا إلى ثقل T تؤثر في مركز العطاف
وإنه راجع ثقل M في مستوى عمود على المتعلق.

... این که از اجزاء لطیف نری نشو شد از غنای و در مختلف از اجزاء
به نظم لایحه.

دیسین لوزہ رواج M الغزم الحانی (اُم نزم الوغناد) عندہ یقطع $abcd$

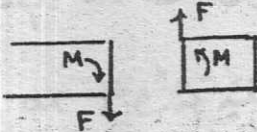
وبالتالي يمكن فصل القوى المؤثرة على المقطع في مستوى إلى نوعين F تؤثر في مركز المقطع وازدراج L يحاول أن يقضي حول محور.

وقد F بالتقريب القاسية عند المقطع $abcd$ كما يسمى بالوزن L بالازدراج الذي $abcd$ عند المقطع $torsion couple$

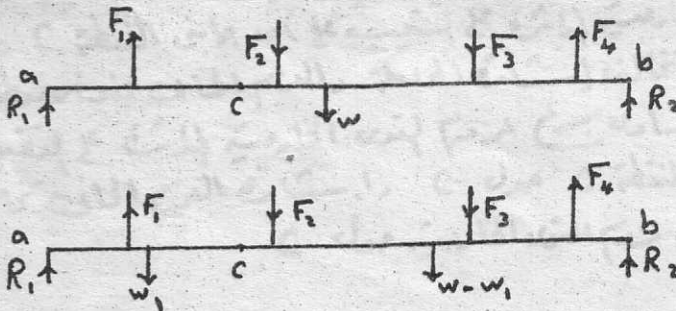
جميع القوى المؤثرة فيه = محاور

جميع هذه الجهود $stresses$ تحاول تغيير شكل القضيب شيئاً تحاول T الحالة القضيب أو ضغطه أو بقية أخرى لتغييره حول بانه M تحاول إضمار القضيب F تحاول قصه L تحاول لقيه حول محور.

دسون تصور مجسماً على الحالات التي تكونه نيزاً جميع القوى المؤثرة في مستوى رأسه ما يربط القضيب ونيزاً يصير التقريب القاسية F في الاتجاه الرأس وينقسم منه إلى ازدراج إلى.



٥) لتقريب القاسية والفرز الحاف لقضيب ننظم رافع تحت تأثير مسبوقة من القوى الخارجية في مستوى رأسه ما يربط لقضيب.



لتكون نفسه ab قضيب ننظم وزنه w سمك منه طرفه على وتد به رافع تحت تأثير القوى F_1, F_2, F_3, F_4 والمحدد ايمار التقريب القاسية والفرز الحاف منه أي نقطه من نقط القضيب مثل c . الجزء cb من القضيب نزنه تحت تأثير القوى:

القوى الخارجية $R_2, F_4, F_3, F_2, w-w_1$

حيث w_1 وزنه الجزء ac من القضيب.

(١) القوى الداخلية لعانة عليه من الجزء ac من القضيب (التقريب القاسية والفرز الحاف)

وهذا المتزام نشط في:

التي القائمة عند C = مصلة القوى الخارجية لدائرة على cb في هذا
وتماثل في الإسكاف.

الوزم الحاف عند C = مصلح لوزم القوى الخارجية لدائرة على cb حول
منه حيث لهذا. ولكنه يتألف في الإسكاف.

كذلك الجزء ac من انقياب تارة متناهي القوى:

(١٧) القوى الخارجية F_1, R_1, w_1

في القوة الداخلية الواقعة عليه من الجزء cb من انقياب.

التي القائمة عند C = مصلة القوى الخارجية لدائرة على ac في هذا
وتماثل في الإسكاف.

والوزم الحاف عند C = مصلح لوزم القوى الخارجية لدائرة على ac
حول C من حيث لهذا. وتماثل في الإسكاف.
وكلي النقطتين C تارة.

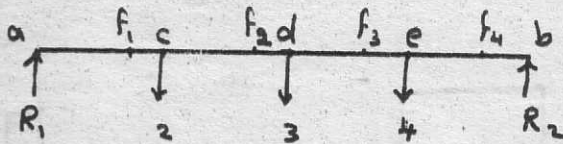
تارة التي القائمة عند أي نقطة من انقياب مثل C تارة
مصلة لهذه الخارجية لدائرة على انقياب على أحد جانبي النقطتين C وإسكاف
القوة القائمة تتألف إسكاف المصلة والوزم الحاف عند أي نقطة C
من انقياب يساهم مصلح لوزم القوى الخارجية لدائرة على انقياب
على أحد جانبي النقطتين C حول C وإسكاف الوزم الحاف تتألف
إسكاف مصلح لوزم القوى الخارجية حول C

٣) أمثلة

مثال (١١)

طاقة انقياب فنيف تتكلم لوله $12 ft$ يرتكز منه طرفيه على حاملين
أسيه. ملكت به الوثقال $16 wt$ 2, 3, 4 إلى اليمين
 ft 3, 6, 9 من a .

أوجد التي القائمة والوزم الحاف منه أي نقطة من نقل انقياب
تكملياً وبياناً.
الحل:



نريد أن نثبت مدى فعالية R_1, R_2
بالتكامل السابقيته:

$$R_1 + R_2 = 9$$

وإذا أخذنا الزخم حول a نجد أنه:

$$12 R_2 = 6 + 18 + 36$$

$$\therefore R_1 = 5$$

$$R_2 = 4$$

نسمي نقطة f_1 بـ a ونسب التردد المرفوع إليها
نقطة القامة F عند $f_1 = 4$ وزنه باره رأيا إلى الأسفل

هذا أصبح عند a وضع النقطة f_1 بين a, c

فإذا تحركت f_1 عند c وتجاوزت الموضع c إلى f_2 فبانه:

النقطة القامة عند $f_2 = 2$ وزنه باره رأيا إلى الأسفل.

نمليه d, c مرة إذا تحركت النقطة f_2 الموضع d إلى f_3 فبانه

النقطة القامة عند $f_3 = 1$ وزنه باره رأيا إلى الأسفل.

لهذا أصبح عند a وضع النقطة f_3 بين e, d فإذا تجاوزت النقطة f_3

الموضع f_3 إلى f_4 فبانه:

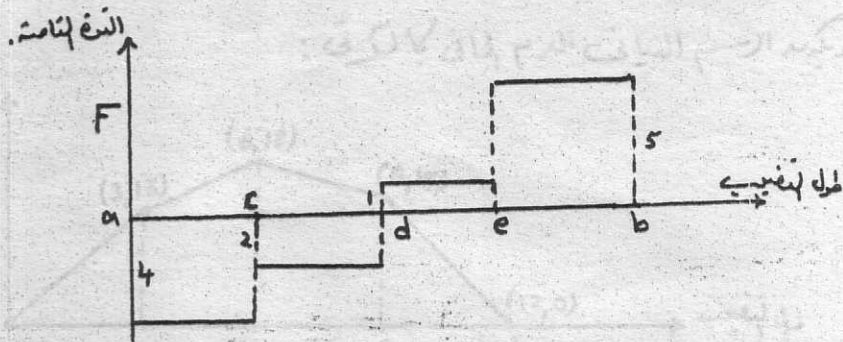
النقطة القامة عند $f_4 = 5$ وزنه باره إلى الأسفل نمليه b, e

نريد أن نثبت أنه تمت القامة تداف تغيرا فجائيا في المدار أو الاتجاه

أو غيرها مما كلما بر نقطة تأثير

كما يلاحظ أنه التغير الحاد في باره عند هذه

والشكل التالي يمثل هذه النقطة القامة F :



وليجار لوزم الحاف :

نفرصه أنه بعد F منه a يباي x ، وباللغز النسبة المتوسطة المربعة
بإتمام النقطة F

∴ الزم الحاف منه $F_1 = 4x$

(1) --- $M = 4x$ أي أنه منه F_1 يكون

وهذا أصح منه أي موضع للنقطة F فيما بين a, c ومنه F_2 يكون :

$$M = 4x - 2(x - 3)$$

(2) --- ∴ $M = 2x + 6$

وهذا أصح منه أي موضع للنقطة F فيما بين c, d ومنه F_3 يكون :

$$M = 4x - 2(x - 3) - 3(x - 6)$$

(3) --- ∴ $M = -x + 24$

وهذا أصح منه أي موضع للنقطة F فيما بين d, e ومنه F_4 يكون

$$M = 4x - 2(x - 3) - 3(x - 6) - 4(x - 9)$$

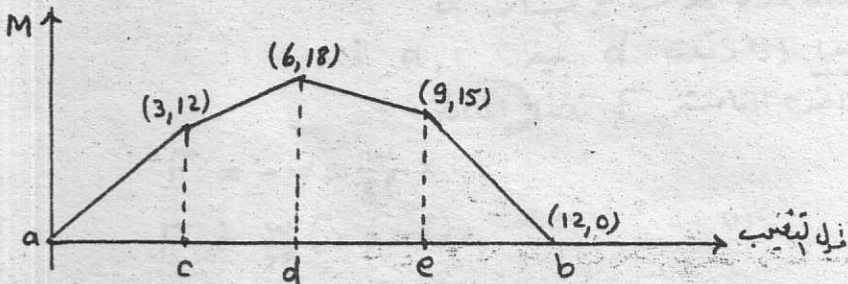
(4) --- ∴ $M = -5x + 60$

وهذا أصح منه أي موضع للنقطة F فيما بين e, b

ويؤيد أنه كل هذه الحالات (1)، (2)، (3)، (4) نحن فلا سيقا دكين
لرسم أي منظر تبينه أي تنظيمه عليه.

(٧٩)

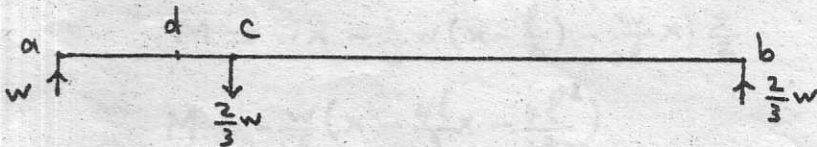
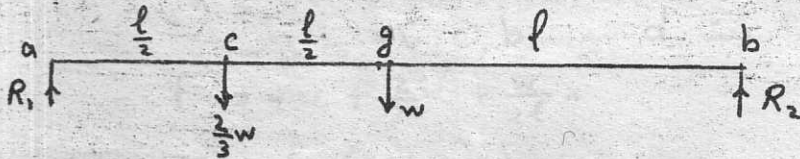
رسم البياني للعض الحادي كالآتي :



مثال (٥) :

أب قضيب متجانس طوله $2l$ وذنه w موزع على طرفيه بحيث يكون في وضع أفقي فإذا ملأه به سائل كثافته $\frac{2}{3}w$ على بعد $\frac{l}{2}$ من أ نرسم منحنى القوة القاسمة ومنحنى العزم الحادي .

الحل :



نجد أولاً رد الفعلية R_1 عند a و R_2 عند b بالتقنين رأسياً نجد أنه :

$$R_1 + R_2 = \frac{5}{3}w$$

بإضافة العزم حول a نجد أنه :

$$R_2 \cdot 2l = wl + \frac{2}{3}w \cdot \frac{l}{2}$$

$$\therefore R_2 = \frac{2}{3}w$$

$$\therefore R_1 = w$$

(٨٠)

لنضع $ad = x$ حيث d ش ab ش d حيث

ونكتب القوة المؤثرة بإشارة d

أولاً إذا وقعت d بين a, c فإنه:

القوة القاسية F تعين بالمعادلة:

$$F = -w + \frac{w}{2l}x$$

$$F = \frac{w}{2l}(x - 2l) \quad \dots (1)$$

حيث $\frac{w}{2l}x$ تمثل وزنه الجزء ad من التثبيت.
والفرع الحاف M عند d تعينه بالمعادلة:

$$M = wx - \frac{w}{2l}x \cdot \frac{x}{2}$$

$$\therefore M = -\frac{w}{4l}(x^2 - 4lx) \quad \dots (2)$$

(ثانياً) إذا وقعت d بين c, b فإنه:

$$F = -w + \frac{2}{3}w + \frac{w}{2l}x$$

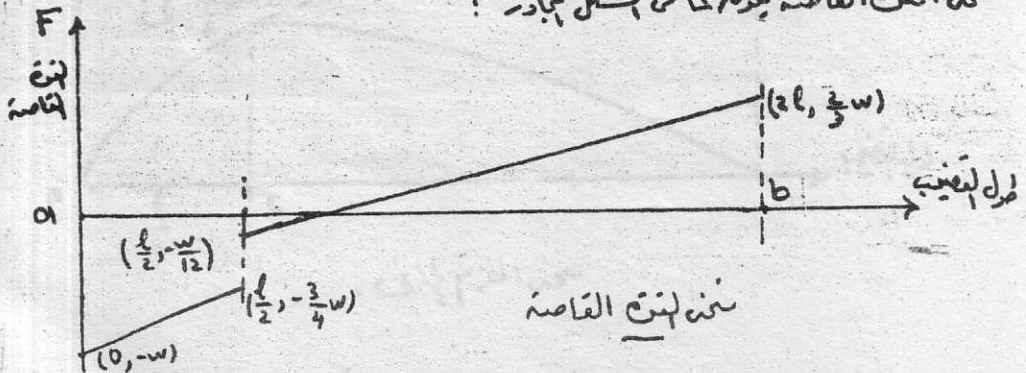
$$\therefore F = \frac{w}{2l}(x - \frac{2}{3}l) \quad \dots (3)$$

$$M = wx - \frac{2}{3}w(x - \frac{l}{2}) - \frac{w}{2l}x \cdot \frac{x}{2}$$

$$M = -\frac{w}{4l}(x^2 - \frac{4l}{3}x - \frac{4l^2}{3})$$

النمط البياني:

نحن نرى القوة القاسية يكون لها شكل الجدار:



رسم مخطات العزم الجاني :

المادة (2) يمكنه وضعه بالصدق :

$$x^2 - 4lx + 4l^2 = -\frac{4l}{w}M + 4l^2$$

$$\therefore (x - 2l)^2 = -\frac{4l}{w}(M - lw)$$

هذه مثل قطعاً كانا متماثلين حول المحور الرأس $x = 2l$
رأسه هو النقطة $(2l, lw)$ ، ونضع لو سن.

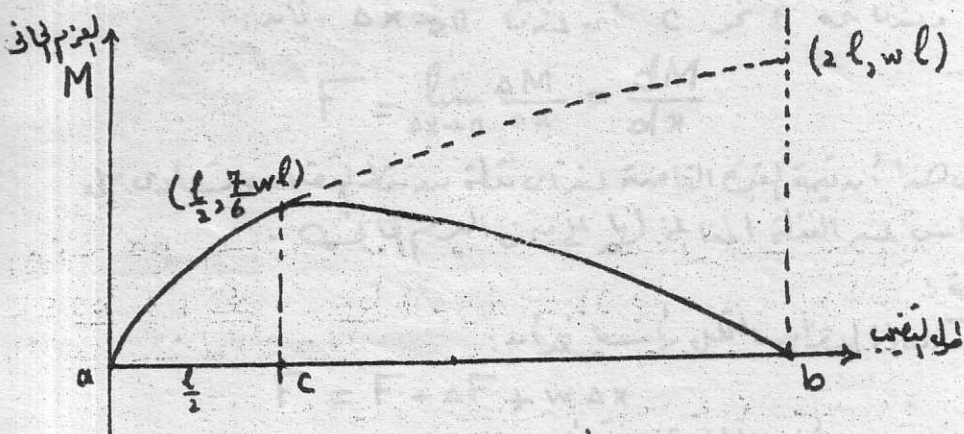
المادة (4) يمكنه وضعه بالصدق :

$$x^2 - \frac{4l}{3}x + \frac{4l^2}{9} = -\frac{4l}{w}M + \frac{4l^2}{3} + \frac{4l^2}{9}$$

$$\therefore (x - \frac{2}{3}l)^2 = -\frac{4l}{w}(M - \frac{4}{9}lw)$$

هذه مادة قطعاً كانا متماثلين حول المحور الرأس $x = \frac{2}{3}l$
رأسه هو النقطة $(\frac{2}{3}l, \frac{4}{9}lw)$ ، ونضع لو سن.

رسم لعزم الجاني إلى الأبرية لم نعدنا $x = \frac{2}{3}l$ ، هذه هي مادة $\frac{4}{9}lw$
ويكون التمثيل البياني للعزم الجاني كما في الشكل التالي :



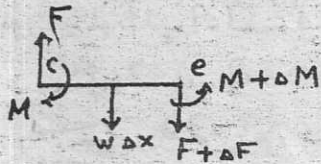
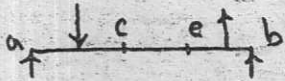
نحذف العزم الجاني .

[٤] ملاحظة هامة :

إذا انزله قضيب منتظم تحت تأثير مسبقته من القوى الرأسية فإنه:
القوة القاصدة F تتغير بالعلاقة:

$$F = \frac{dM}{dx}$$

حيث F إلتق القاصدة عند أي نقطة من نقطة لقضيب
 M العزم الحاف عند هذه النقطة.
 x أي مسافة إلى لقضيب.

البرهان :

لنؤخذ بقدر لا صغارا Δx

من لقضيب a إلى b أي مسافة x من a

ولكنه $ec = \Delta x$ حيث $\bar{ec} = \Delta x$

∴ العنصر $\bar{ec}$ تنزله.

نأخذ العزم حول c ينتج أنه:

$$M + \Delta M - (F + \Delta F)\Delta x - w \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} - M = 0$$

حيث w وزنه و Δx طول الـ c من لقضيب.

$$\therefore F + \Delta F = \frac{\Delta M}{\Delta x} - \frac{1}{2} w \Delta x$$

ومن مآجه e نمر c أي من a $\Delta x \rightarrow 0$ فإنه:

$$F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}$$

ومن هذا أنه قيمة إلتق القاصدة عند أي نقطة من نقطة لقضيب c أي من
المسافة من التلة المقابلة للـ a من العزم الحاف.

نتيجة :

من سائر العلاقات بالتكامل رأسيا نجد أنه:

$$F = F + \Delta F + w \Delta x$$

وبأخذ النهايات ينتج أنه:

$$\frac{dF}{dx} = -w$$

تأريخ

- (١) قضيب خفيف يكفيه إهمال وزنه طوله 30 cm ويميل بتساوي 9 Kg. عند نقطة تقسمه بنسبة 2 : 1 وإذا وصل القضيب في وضع أفقي عند طرفيه نأرسم الشكل البياني للثقل القاصي والوزن الجاف منه جميع نقاط القضيب
- (٢) قضيب AB أفقي منتظم طوله 25 ft. سمك 10 lb. عليه من A, C حيث $BC = 5$ ft. دليعه بمرنه B كلفة 10 lb. فإذا كانت كلفة الخدم الطولية من القضيب 5 lb. نأرسم كل واحد من الثقل القاصي والوزن الجاف منه نقطة القضيب
- (٣) قضيب AB خفيف طوله 20 ft. يزنه في وضع أفقي لا دليعه عليه C, D حيث $AC = 4$ ft, $BD = 6$ ft. عليه المتكافئة 4 lb, 6 lb. من الطرفين A, B مع الوزن كما وضع ثقل ثالث مقداره 20 lb. في الجزء CD. نأرسم الشكل البياني للثقل القاصي والوزن الجاف منه جميع نقاط القضيب (تحليلها رياضيًا) لإنتاج التوزيع من هذا الوزن الجاف
- (٤) ab سلك أفقي خفيف طوله 10 ft. وسمك 10 lb. عليه يبداه من a بوزن 7 ft, 2 ft. فإذا دليعه من a, b المتكافئة 1 ton, 2 ton. دليعه من a عليه وضع ثقل بانتظام بوزن 2 ton للوزن الطولية نأرسم الخلية البيانية للثقل القاصي والوزن الجاف
- (٥) ab سلك أفقي منتظم طوله 10 ft. ووزنه 2 lb. لكل ردة طول سمك في وضع أفقي عليه من طرفيه a, b وسمك 30 lb. عند نقطة بعد 4 ft. من إحدى طرفيه. نأرسم كل واحد من الثقل القاصي والوزن الجاف الخافي منه من نقطة نقط القضيب ونقيم موضع التوزيع للوزن الجاف

الباب الثامن

اتزان الخيوط الثقيلة السهلة التي

Equilibrium of flexible strings.

١١ تمديد :

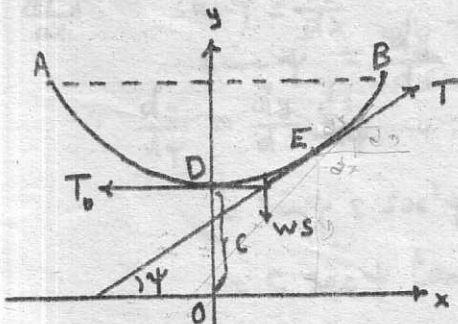
تكونه قابلية الخيط للتمدد إذا كانت القوة المؤثرة مع قطع لمودس على طوله إلى ثقل دائم في اتجاه الجاه للمخيط. وسنكون نفرض أنه المقطع به نصف مجيء يمكننا اعتبار الخيط فطائنيا. كما أنه الخيط لبقايم الإختار طلقا ديم ذلك فقد يكون الخيط شكل معين. ويمكنه اعتبار سلسلة مكونة من حلقات معينة جدا زمان المرونة أطول فيط سطر الذي إذا ما في حالة فيه لتيه قابلية للتمدد إلى ثمانية أرض حالة بأنه يندرج التي تؤثر به لتقطع لتدور إلى ثقل دائم في اتجاه الجاه للمخيط دائما فتدور إلى ثقل دائم وزاد وزاج.

التي تؤثر به
التي تؤثر به

ومن دراسة التوازن فيط سون نثبت نقط الخيط الرقيقة وذلك قام الإختار
لأنه لمقطع الخيط يكونه نقطه ثقل في اتجاه الجاه للمخيط.

٢ أنزاه فيه ثقل منتظم إلى (دنية قابل للدوران) معلوم من نقطتين إلى

مستقيم أفقي تحت تأثير وزنه نقطه.
(The common catenary)



لذلك:

نصفه منه الخيط انزاه في وضع أفقي

فيه إمكان ADB حيث D

هو آخر نقطه منه A, B

نقطة.

ثم نعتبر الرأس OD مركز المصداق

والنقطة Ox مركز البنية كما في الشكل

الفصل الثاني من الكتاب الثاني

(5) حاشة انقوصية

no fraction

الجزء DE (دعوه و بقائه D) ستم تحت تأثير القوى الميكانيكية

(١) T_0 عند D في اتجاه أفقي (المماس للخط)

(٢) T عند E في اتجاه المماس الذي يصنع زاوية ψ مع Ox

(٣) ws (وزن الجزء DE) عند مركز ثقل القوس DE رأسيا

إلى أسفل حيث w وزنه و s طول الارتفاع إلى الجهد ، و طول

القوس ابتداء من D

∴ معادلة التوازن في الاتجاه الأفقي هي :

$$T \cos \psi - T_0 = 0$$

وفي الاتجاه الرأسي

$$T \sin \psi - ws = 0$$

$$T_0 = wc$$

حيث c مقدار ثابت يسمى $\frac{T_0}{w}$

عندئذ يكون :

$$T \cos \psi = wc$$

$$T \sin \psi = ws$$

$$\therefore \tan \psi = \frac{s}{c}$$

$$\therefore s = c \tan \psi \Rightarrow$$

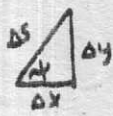
$$\begin{aligned} T^2 \cos^2 \psi + T^2 \sin^2 \psi &= \\ T^2 &= w^2 (c^2 + s^2) \end{aligned}$$

$$\frac{ds}{d\psi} = c \cdot \frac{1}{\cos^2 \psi} = c \cdot \sec^2 \psi$$

المعادلة (١) هي المعادلة التفاضلية التفاضلية

ديفرينسيال c بارامتر متغير الكثافة.

يمكنه :



$$\tan \psi = \frac{dy}{dx}$$

$$\sin \psi = \frac{dy}{ds}$$

$$\therefore \frac{dy}{d\psi} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\psi}$$

$$= \sin \psi \cdot c \sec^2 \psi$$

$$= c \sec \psi \tan \psi$$

[باستخدام (١)]

$$c \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} =$$

$$\int dy = c \int (\sin x / \cos^2 x) dx \quad (2)$$

$$y = \frac{p}{\cos 25^\circ} + C \quad 2 \quad y = 0.920445 + C_1$$

دالة التكاليف نجد أنه:

$$y = c \sec \psi + C_1$$

حيث C_1 ثابتة التكاليف

دالة اختيار المتغيرات بحيث يكون $y = c$ عندما $\psi = 0$

$$C_1 = 0$$

فإنه

$$\therefore y = c \sec \psi$$

... (١٢) ③

دالة:

$$\tan \psi = \sqrt{\sec^2 \psi - 1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}$$

[باستخدام (١٢)]

$$\therefore \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c} dx$$

دالة التكاليف:

$$\therefore \cosh^{-1} \frac{y}{c} = \frac{x}{c} + C_2$$

حيث C_2 ثابتة التكاليف

دالة $x = 0$ عندما $y = c$ ونجد أنه $C_2 = 0$

$$\therefore y = c \cosh \frac{x}{c}$$

... (٣) ④

دالة المعادلة الكارتيزية للمنحنى ADB و الذي يسمى بمنحنى

بصلة إهاري أو الكيتنة.

دالة (٢) نجد أنه:

$$y^2 = c^2 \sec^2 \psi$$

$$\therefore y^2 = c^2 (1 + \tan^2 \psi)$$

$$= c^2 \left(1 + \frac{s^2}{c^2}\right)$$

$$\therefore y^2 = c^2 + s^2$$

[باستخدام (١١)]

... (٤) ⑤

(187)

رسم الماركة (3) نجد أنه:

$$c^2 \cosh^2 \frac{x}{c} - c^2 = s^2$$

$$\therefore c^2 \sinh^2 \frac{x}{c} = s^2$$

$$\therefore s = c \sinh \frac{x}{c} \quad \dots (5) \quad (b)$$

$$\frac{s}{c} = \tan \psi \quad \text{نكتبه:}$$

$$\therefore \tan \psi = \sinh \frac{x}{c}$$

$$\therefore x = c \sinh^{-1}(\tan \psi)$$

$$\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad \text{دعنا أنه}$$

$$\therefore x = c \ln(\tan \psi + \sqrt{\tan^2 \psi + 1})$$

$$\therefore x = c \ln(\tan \psi + \sec \psi) \quad \dots (6) \quad (c)$$

نستعمل المبدأ بالشرط المتعارضة وهو أنه x عند c من المثلث D يساوي بالدليل.

دعنا نسمي D على AB بسم sag رسم معادلته لوزانه نستنتج أنه:

$$T^2 = w^2 (c^2 + s^2)$$

$$= w^2 y^2$$

[باستخدام (4)]

$$\therefore T = wy$$

... (7) //

المعادلة (7) توضح أنه ليس عند أي نقطة من نقطة المثلث العادية يساوي وزنه طول من المثلث تدعى y أو ارتفاع المثلث من الدليل.

بوضوح:

(a) بما أنه:

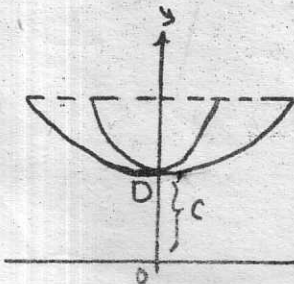
$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

$$= c \left(1 + \frac{x^2}{2!c^2} + \frac{x^4}{4!c^4} + \dots \right)$$

بماذا كانت x صغيرة فإنه:

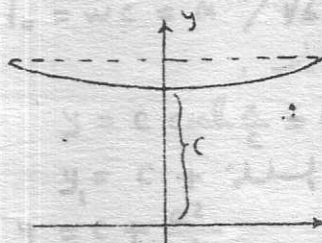
$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

$$\therefore x^2 = 2c(y - c)$$



(٨٨)

نستخرج من أن x متغيرة في مدار استقرت في D نقطة على طول كمان



لمدار وقطره البؤري بعدد $2c$

رأى كذلك إزاحات c كمية بالنسبة

إلى x بأنه يمكن إهمال الحد

استدار به $\frac{x^4}{4!c^4}$ ونرى من

السلسلة في هذه الحالة أنه يمكن إهمال الحد

$$x^2 = 2c(y - c)$$

(٣) أما إزاحات c صغيرة بالنسبة

إلى x فإنه

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

$$= \frac{c}{2} (e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}})$$

بأنه يمكن إهمال $e^{-\frac{x}{c}}$ ونرى من سلسلة في هذه الحالة أنه

يمكن الدالة الأسية:

$$y = \frac{c}{2} e^{\frac{x}{c}}$$

المسألة ٣

المسألة ٤

مبدأ في تنظيم مدار $2l$ وارتفاعه h في نقطة a من التوزيع

بأرض $2a$ بإزاحات l تزيد تغييره a ثابتاً:

أولاً: إذا كان l في هذه الحالة a متغيرة في مدار $2a$ تقريباً

$$a^2 / \sqrt{6(l-a)}$$

معادلة مدار $2a$ بإزاحات l تزيد تغييره a ثابتاً:

$$\frac{1}{2} \sqrt{6a(l-a)}$$

المسألة ٤

$$\therefore s = c \cosh \frac{x}{c} = c \left(\frac{x}{c} + \frac{x^3}{3!c^3} \right)$$

$$\therefore s = x + \frac{x^3}{6c^2}$$

$$\therefore l = a + \frac{a^3}{6c^2}$$

(١٩)

$$\therefore C = \sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$

$$T_0 = wc = a^{3/2} / \sqrt{6(l-a)}$$

∴ السكة أسفل نقطة صفر:

صلابة زلزال

$$y = c \cosh \frac{x}{c} = c \left(1 + \frac{x^2}{2! c^2} \right) = c + \frac{x^2}{2c}$$

$$y_1 = c + \frac{x^2}{2c}$$

$$y_1 = c + \frac{a^2}{2c}$$

$$\frac{a^2}{2c} = \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{6(l-a)}{a^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{6a(l-a)}$$

الصلابة

exam

مسألة (١٠)

خيط ثخين متين طولُه 90 in يرتكز لاثنين أمليين مختلفين لارتفاع فإذا أمم طول الجزأين المتدليين رأسيا هما 30 in ، 33 in فأوجد أنه رأس نخلة السكة ينقسم المحل الكلي للخيط بنسبة 4 : 5

الحل:

الجزء المتدلي من الخيط رأسيا عند B
يتركز تحت تأثير ثقلها وزنه دسـهـ بان الخيط
أن السكة في الخيط عند B

∴ وزنه الجزء المتدلي من الخيط رأسيا عند B = السكة عند B
دسـهـ

$$T_B = w y_B$$

∴ وزنه الجزء المتدلي من الخيط رأسيا عند B = $w y_B = T_B = w(33)$

$$w y_B = w(33)$$

$$y_B = 33$$

لا بد أن السكة عند B

والمثل يأنه الطرف الأيسر للجزء الرأسية من الخيط المتدلي عند B يجب أن يتصل بالجزء
بالمثل يأنه الطرف الأيسر للجزء الرأسية من الخيط المتدلي عند A
يجب أن يتصل بالجزء الآخر

(91)

سه (2) بنده:

$$T_D = w c = \frac{\ell^2 - h^2}{2h} w$$

: $w \sim r$

$$T_A = w \left(h + \frac{\ell^2 - h^2}{2h} \right)$$

$$\therefore T_A = \frac{\ell^2 + h^2}{2h} w$$

دبا: $\sim$

$$s = c \tan \psi$$

: $\therefore$ لینه الطائرہ یکون:

$$\tan \psi = \frac{c}{s} = \frac{2hl}{\ell^2 - h^2}$$

$$\boxed{\tan \psi = \frac{s}{c}}$$

$$= \frac{2 \frac{h}{\ell}}{1 - \frac{h^2}{\ell^2}}$$

 $\ell^2 +$

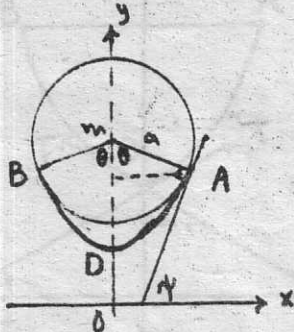
$$\therefore \psi_A = 2 \tan^{-1} \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

کلیت

مثال (1):

مضلع مثلثی شکلہ متعلقہ فوہ میں دائری ایلر نصف قطر α بجت
 ۲ ستوی راسی یازا θ کہ طول جزو ایلر ایلر سے زیادہ کیلئے
 کیلئے ناؤ بعد طول ایلر.

الحل:



نقصہ اُنہ ایڈر ایلر سے زیادہ کیلئے ADB

طولہ سے ایلر سے زیادہ $\frac{1}{3}(2\pi\alpha)$

دیکھ

$$\frac{2}{3}\pi\alpha = \alpha \cdot 2\theta$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$x = c \ln(\tan \psi + \sec \psi)$$

: $\therefore$

$$\psi_A = \theta = 60^\circ$$

راضی اُنہ

∴ A کی نوع :

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = C \ln(\sqrt{3} + 2)$$

$$\therefore C = \frac{\sqrt{3}}{2 \ln(\sqrt{3}+2)} a$$

وسد لعل لکذا سمع نوت امد:

$$s = c \tan \psi$$

$$\therefore S_A = c \tan 60^\circ = \frac{3}{2 \ln(\sqrt{3}+2)} a$$

$$\frac{4\pi a}{3}$$

درباره طول الجزء الموصلة للحداد

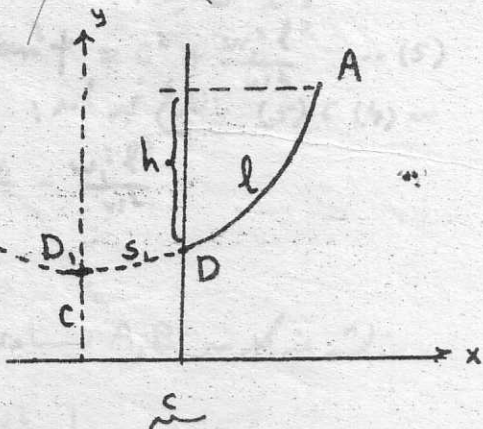
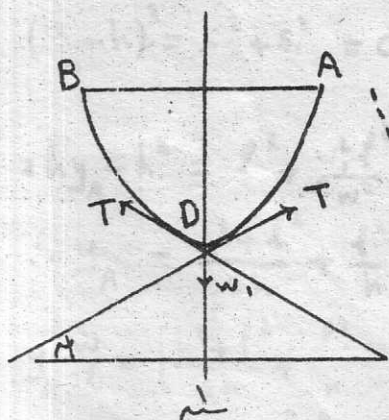
$$\frac{4\pi a}{3} + \frac{3}{\ln(\sqrt{3}+2)} a$$

∴ طول اسلحه =

:(۵) لعل

۱- شتاب طولی l و دوزنی w . نسبت به نقطه A, B می
 شود آنقدر واحد و سه آن نقطه h باشد و در نقطه w_1
 ناصب به آن نقطه AB شود h . آنگاه این نسبت A, B
 هو : $\frac{1}{2} \left[\frac{l}{h} w_1 + \frac{h^2 + l^2}{2hl} w \right]$

الحسن :



من هنا نرى ان l لا تتغير مع h كالتنبؤ بالنسبة للرأس المار بالنقطة D .

رأى في المثال انه ليس من D بالنسبة للكتيبيته متساوية ويمكن كل منها T نأخذ l المماس لـ D يصنع زاوية ϕ مع الارتفاع h :
 $2T \sin \phi = w_1$ (1)

والنسبة لعدد الكتيبيته يكونه :

$$T \cos \phi = \frac{w}{c} \quad \text{--- (2)}$$

حيث c باءات الكتيبة l في DA من جزء منظر.
 ولتكن D_1 انحرافه من D الكتيبة كما في شكل (2)
 من (1) و (2) نستنتج انه :

$$\tan \phi = \frac{w_1 l}{w c} \quad \text{--- (3)}$$

ولتكن $DD_1 = s_1$ ،

$$y^2 = c^2 + s^2 \quad \text{وبما انه :}$$

(النسبة لـ DA جزء منظر)

$$\therefore y_A^2 = c^2 + (s_1 + l)^2 = c^2 + (c \tan \phi + l)^2 = c^2 + \left(l + \frac{w_1 l}{w}\right)^2 \quad \text{[بالتعويض (3)]}$$

$$\therefore y_A^2 = c^2 + \left(l + \frac{w_1 l}{w}\right)^2 \quad \text{--- (4)}$$

ونرى D يكونه :

$$(y_A - h)^2 = c^2 + s_1^2 = c^2 + c^2 \tan^2 \phi = c^2 + \frac{w_1^2 l^2}{w^2} \quad \text{--- (5)}$$

من (4) و (5) بالرفع نجد انه :

$$2hy_A - h^2 = l^2 + \frac{w_1^2 l^2}{w^2} + \frac{2l^2 w_1}{w} - \frac{w_1^2 l^2}{w^2}$$

$$\therefore y_A = \frac{h^2 + l^2}{2h} + \frac{l^2}{h} \frac{w_1}{w}$$

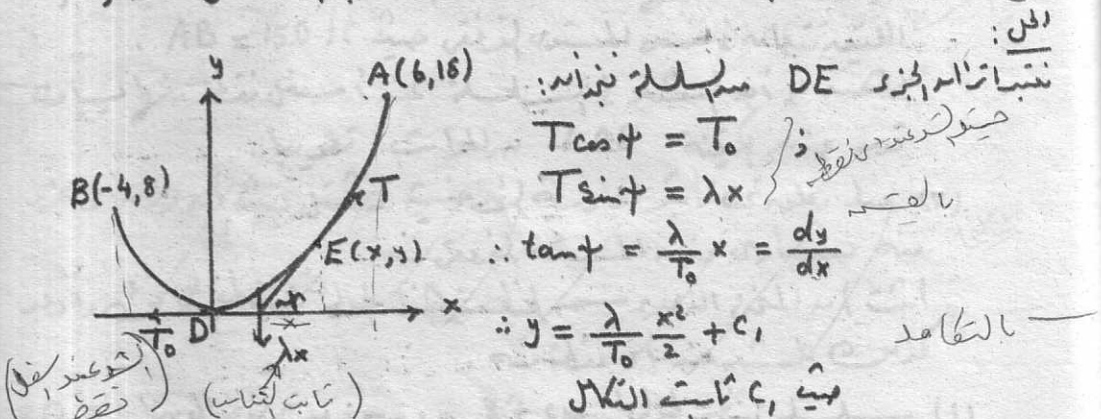
$$y_A \frac{w}{2l} = \left[\frac{h^2 + l^2}{2h} + \frac{l^2}{h} \frac{w_1}{w} \right] \frac{w}{2l} \quad \therefore \text{نرى انه كل من } A, B \text{ يساوي :}$$

$$\therefore T_A = T_B = \frac{1}{2} \left[\frac{l}{h} w_1 + \frac{h^2 + l^2}{2hl} w \right]$$

صديقي

مسألة (١٦):

نقطة D هي نقطة على المحور y في المستوى xy حيث $A = (6, 18)$ و $B = (-4, 8)$ بالنسبة لمحور y متعامدة مارة بالنقطة D فإذا كان وزن A و B 100 lb. wt. فأوجد D بحيث تكون A, B في حالة التوازن.



$$T \cos \phi = T_0$$

$$T \sin \phi = \lambda x$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{\lambda}{T_0} x = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y = \frac{\lambda}{T_0} \frac{x^2}{2} + C_1$$

حيث C_1 ثابت التكامل

عند $x = 0$ و $y = 0$ و $C_1 = 0$

$$\therefore y = \frac{\lambda}{T_0} \frac{x^2}{2}$$

وزن سلك DE كالتالي

$$\therefore 100 = \lambda(6+4) \quad \therefore \lambda = 10$$

وزن سلك DE كالتالي: (وزن A) لا تساو وزن B على المحور y متعامدة

$$18 = \frac{10}{T_0} \frac{36}{2}$$

$$\therefore T_0 = T_D = 10 \text{ lb. wt.}$$

وزن سلك DE كالتالي:

$$T^2 = T_0^2 + \lambda^2 x^2$$

$$\therefore T_A^2 = 100 + 3600 = 3700$$

وزن A كالتالي:

$$\therefore T_A = 10\sqrt{37} \text{ lb. wt.}$$

$$T_B^2 = 100 + 1600 = 1700$$

وزن B كالتالي:

$$\therefore T_B = 10\sqrt{17} \text{ lb. wt.}$$

الخط غير مستقيم لا يمكن استخدامه مع معادلة لا فضاء
كما انه لابد ان يكون قطع مكافئ

$$T \cos \alpha = l_0$$

$$T \sin \alpha = x \lambda$$

$$\tan \alpha = \frac{x \lambda}{l_0} = \frac{25}{6}$$

$$y = \frac{\lambda}{2 l_0} x^2 + C$$

$$\rightarrow y = \frac{\lambda}{2 T_0} x^2 + C$$

$$100 = \lambda(6+4) = \lambda - 10$$

$$l_0 = \frac{\lambda}{2 T_0} (36)$$

$$12 = \frac{10}{T_0} \cdot \frac{36}{2}$$

$$l_0 = \frac{\lambda}{2 T_0} (16)$$

$$T_0 = 10$$

$$10 = \frac{\lambda}{2 T_0} (10) \rightarrow \lambda = T_0$$

$$\rightarrow \lambda = T_0 \quad \text{--- (C)}$$

$$100 = \lambda(10) \rightarrow \lambda = 10 \quad T_0 = 10$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 = 2y$$

$$\rightarrow l_0 = l_0 + C \rightarrow C = 0$$

$$T^2 = 100 + 100x^2$$

$$T^2 = l_0^2 + 2^2 x^2$$

$$= 100 + 100x^2$$

تجارب

(١) أوجد أكبر قيمة للشد في سلك ربيع منتظم طوله سبعمائة في نقطتين A, B حيث أنقى ريشه 100 ft. إذا كان له ارتفاع الكتلة التي يكون السلك أسفل AB ياردي 1 قدم وكتلة البكرة الدائرية هي 0.15 ياردي.

(٢) كتلة منتظمة طولها 155 ft. مثبت طرفيها في نقطتين A, B اللتين تبعدان في نفس المستوى البعد حيث $AB = 150$ ft. بوجهه إلى أنه ليس في السلك عند أسفل نقطة من طرفي ياردي قدر وزنه الكتلة 1.08 من المرات تقريباً.

(٣) ميله معلوم تحت تأثير الجاذبية الأرضية وسنقل بحيث أنه وزنه أي جزء منه ياردي وزنه السلك المتعلق له. taker
أثبت أنه المحزن الذي يربط في هذه الحالة هو قطع كما نرى وأوجد كذا الشد في أي نقطة منه.

(٤) سلك منتظم طولها 37 cm ووزنه 20 g. مثبت في طرفيها في نقطتين ثابتتين A ثم يرت السلك في بكرة صغيرة ملأ في السلك البعد المار بالنقطة A وسنقل سلكاً رقيقاً تحت B طول دة 13 cm. أوجد الشد عند A وكتلة زاوية في الكتلة عند نفس السلك ووجهه إلى أنه ليس في السلك عند أسفل نقطة منه الكتلة ياردي وزنه 100 جرام.

(٥) علقت سلكاً منتظم طولها l بين نقطتين A, B دائريتين في خط أفقي واحد. فإذا كان الشد عند أي طرف منه سلكاً ياردي n من المرات تده الشد عند أسفل نقطة فيه هو l إلى أنه ليس في السلك AB ثقل يساوي

$$AB = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}} \ln(n + \sqrt{n^2-1})$$

(٦) صلب منتظم طوله l في حوله $2a(1+k)$ معلوم من نقطتين نقيم أنقى البعد بينهما $2a$ فإذا كانت k صغيراً لدرجة تكفيها، إجمالاً يكون السلك

لأنها ثابتة أنه $\frac{1}{2} \alpha \sqrt{6K} (1 + \frac{7}{20} K)$

$$\frac{1}{2} \alpha \sqrt{6K} (1 + \frac{7}{20} K)$$

(٧) يرمز بتتبع تنظيم طوله 64 إلى بكرية بلادييه بتعيينه إلى قسم

انفق فإذا انزله المحيط في وضع مثالي كما أنه عند أسفل نقطة سم الجزو لنفث

تحت سون البكرية هو 4 فأوجد طول كل سم الجزايم المتدلية

أيا والبدييه البكرية. رأيت أنه لضغط في كل سم البكرية

يأخذ دونه طوله سم المحيط تحت 40 . $(50, 48, 46, \dots, 24)$

(٨) سلسلة منتظمة طولها 2 ووزنها W معلقة من نقطتين A, B

من نفس المستوى الأفقي. على مثل تدعى W_1 سم منتصف السلسلة D

فإذا كانت $AB = 2a$ فأوجد منه الموضع الثلاثي للنقطة D في

المنطق AB .

الباب التاسع

مركز الثقل

Centre of Gravity

١١ تمهيد :

جهة انه فرضا انه كل نقطة مادية (أو جسم) تتوزع ثباتاً تحت جذب جهة واحدة نحو مركز الأرض وتسمى تلك جهة الجذب ^{المحاذ} الجذب الجسيم وتتناوب تلك الجهة مع كل نقطة الجسيم . يمكن اعتبار أن جسم كدائره له مركز جاذبية أو نقطة المادية فإذا كان الجسم موزعاً بالثقل في هذه الجهة فكل نقطة من تلك الجهة تتوزع الجذب المتوزع والمتميز كل واحد نحو مركز الأرض يمكن اعتبارها متوازنة أي أنه كل جسم من جسم يتوزع ثباتاً في جهة واحدة إلى أسفل يسمى وزنه الجسيم وهذه الثقل المتوزع والمتوازنة يمكن فصلها إلى ثقل واحد جاذب لمركزه الجسيم كله وتوزع في نقطة معينة من الجسم تسمى مركز ثقل الجسم . أي أنه مركز ثقل الجسم أو نقطة جاذبية نقطة يعجز عن إقصاءها عما هو تحت النقطة التي يمر بها خط عمل وزنه الجسيم أو الجاذبية وإنما هو كما وضع الجسم . وإذا كان للجسم مركز ثقل فانه مركز ثقل الجسم يكون هو مركز ثقل هذا الجسم .

- ١- مركز ثقل قضيب منتظم يقع منه منتصفه .
- ٢- مركز ثقل السطح أو متوازناً أو المثلث أو الدائرة أو القطع الناقص المنتظم يقع منه المركز الهندسي للثقل .
- ٣- مركز ثقل كرة منتظمة أو الجسم الناقص المنتظم يقع أيضاً منه المركز الهندسي للثقل .



٢ مركز ثقلهم شروق : tetrahedron

نقسمه إلى $oabc$ هم شروق دانه d
نقسم ac ، e نقتطع bc ، g مركز ثقل
القائم abc

نقسم الجسم إلى صفائح شبيهة رقيقة متوازية
درجانية للقائم abc ونكس a, b, c إمداها
ثم نصل oe فيقطع b, c في e_1 ثم
نصل og فيقطع a, e_1 في g_1
نلاحظ : oge, og_1e_1
متشابهة لساوية الزوايا
فإن :

$$\frac{ge}{g_1e_1} = \frac{oe}{oe_1} = \frac{og}{og_1} \quad \dots (1)$$

وكذلك لثبات og_1a, og_1a_1
متشابهة لساوية الزوايا
فإن :

$$\therefore \frac{og}{og_1} = \frac{ag}{a_1g_1}$$

$$\frac{g_1e_1}{ge} = \frac{a_1g_1}{ag}$$

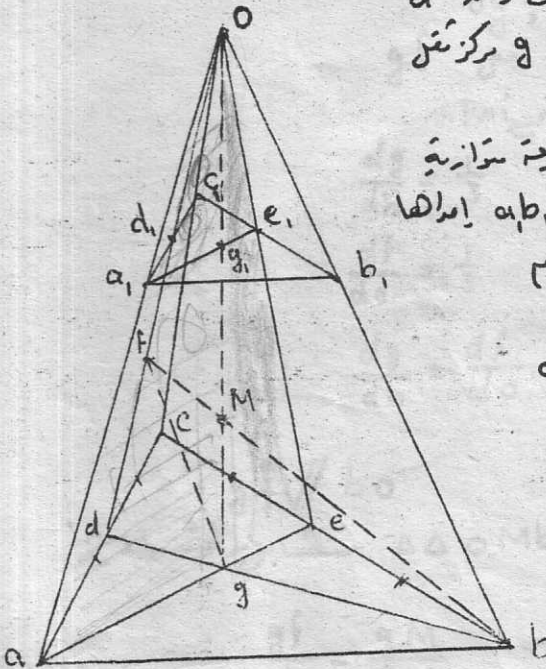
$$\therefore \frac{g_1e_1}{a_1g_1} = \frac{ge}{ag} = \frac{1}{2}$$

وهذا لأنه ae ينقسم بنقطة g في $\triangle abc$

g_1 هو مركز ثقل الصفيحة الشبيهة $a_1b_1c_1$

بالإمكان إثبات أنه مركز ثقل جميع الصفائح الشبيهة الدائرة للقائم abc
تقع على og

وكذلك إذا قسمنا الجسم إلى صفائح شبيهة متوازية رقيقة الجسم oac فإنه
يمكن إثبات أنه مركز ثقل الجسم يقع على bf الوصل من الرأس b
إلى مركز ثقل الجسم oac



∴ مركز ثقل الهم $oabc$ هو النقطة M ، وهو نقطة تقاطع

المتقيية og, bf
 ذلك نسبة بوضع النقطة M مثل gf
 في $\triangle obd$ ، وانتهى به:

$$\frac{dg}{db} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{df}{do} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{dg}{db} = \frac{df}{do}$$

والذي يدل عليه:

$$gf \parallel bo$$

وهو ثم نستنتج أنه $gMf, oMb, \triangle obd$ متشابهة لتأديها
 في الزوايا.

$$\therefore \frac{gf}{ob} = \frac{gM}{oM}$$

وكذلك لأنه $gf \parallel ob$ نجد أنه:

$$\frac{gf}{bo} = \frac{dg}{db} = \frac{1}{3}$$

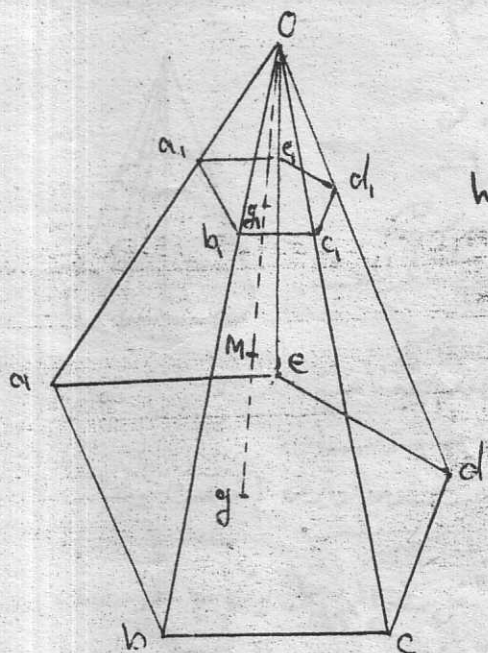
$$\therefore \frac{gM}{oM} = \frac{1}{3}$$

أي أنه مركز ثقل الهم المتروك هو النقطة M التي تقع على التقاطع
 الدائم من أحد رؤوس إلى مركز ثقل الوجه المقابل لهذا الرأس
 ونجد النقطة M مع الوجه المقابل بمبدأ ربيع البرهان.
 أما بعد آخر فبأنه لنقطة M تنقسم الخط الواصل بين الرأس إلى النصف المتساوية
 بنسبة ١ : ٣ من جهة النصف إلى ٣ : ١ من جهة الرأس.

نتيجة:

مركز ثقل الهم المتروك هو نقطة أربع نقاط مارية متبادلة

عند رؤوسه.



٣ مركز ثقل هرم قائمة أي ضلع :

نرمسه انه $oabcde$ هرم برسم
 في القامع $abcde$ رانه مركز ثقل
 القامع هو g رانه ارتفاع الهرم هو h
 اولاً : أي مستوى يوازي القامع يقطع
 الهرم في مستوى مثل a_1, b_1, c_1, d_1, e_1
 بمقتضاه لهذا المستوى يشابه القامع
 وكذلك تقع g_1 مركز ثقل القامع
 a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 على og
 فإذا امتدنا الهرم كونا سه ضئلي
 رتيعة يوازيه القامع $abcde$
 فانه مراكز افعال جميع هذه الضئلي
 تقع جميعها على og

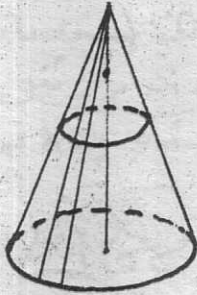
ولذلك يجب ان يقع مركز ثقل الهرم على الخط og .
 ثانياً : إذا كانت ثقل الهرم في المثلثات مثل : abc, acd, ade
 فبذلك البناء الهرم $oabcde$ كونا سه ثقل افعال ثلثية.
 فبذلك مركز ثقل كل سه هذه الافعال الثلثية يقع على القامع
 سانه ثلثي $\frac{1}{4}h$

∴ مركز ثقل الهرم يوضع على القامع بمقدار $\frac{1}{4}h$
 ثالثاً : ∴ مركز ثقل الهرم يقع على الخط og الاصل سه رأسه إلى مركز ثقل
 قائمته ونقسم هذا الخطين بنسبة ١ سه جزء القامع
 إلى ٣ سه جزء الرأس.

نتيجة :

مركز ثقل المنروط الدائري القائم المصمت يقع على الخطين الاصل سه الرأس إلى مركز
 القامع وللاسه سه القامع يساوي $\frac{1}{4}$ ارتفاع المنروط وذلك لانه المنروط الدائري
 القائم المصمت يمكن ان يوضع الزواضع لهرم قائمة منتظم ويزداد عدد اضلاع
 القامع زيادة لانه لانه

٤ مركز ثقل السطح الجانبي لخروط دائري قائم :



(الخروط أعرف بدونه قائم)

نأخذ من سطح قائم الخروط نقطة ما في

التقارب بعضها به بعض ثم نصل بين رأس

الخروط وبينه هذه (نقطة) فنقسم هذه

سطح الخروط إلى عدد لوني في سطحنا المثلثة

ديان مركز ثقل كل من هذه المثلثات يقع

على أحد مستقيمات المتوازية ولها به مناصبة

الرأس يباري $\frac{2}{3}$ طول هذه المستقيم المتوازية

∴ مركز ثقل سطح الخروط يقع على مستوي ديان له قائم ويبعد

منه الرأس بمقدار $\frac{2}{3}$ ارتفاع الخروط

ولكنه من التماسك ليس ارتفاعه من مركز ثقل سطح الخروط يقع على مستوي

∴ يقع مركز ثقل سطح الخروط على مستوي ويبعد منه الرأس

بمقدار $\frac{2}{3}$ طول الارتفاع

٥ مركز ثقل مجموعة من الدوائر مضبوطة في نقطة مستوية :

إذا كان لدينا مجموعة من الدوائر :

$w_1, w_2, \dots, w_n$

مضبوطة في نقطة :

(x_1, y_1)

w_1

(x_2, y_2)

w_2

(x_n, y_n)

w_n

$(\bar{x}, \bar{y})$

$w_1 + w_2 + \dots + w_n$

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

بالنسبة لمحورين متعامدين يتعامد في نفس مستوى

مجموعة الدوائر ولها مركز ثقل هو

النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ ناه :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^n w_r x_r}{\sum_{r=1}^n w_r}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^n w_r y_r}{\sum_{r=1}^n w_r}$$

البرهان:

نفرض أنه xoy مستوى الإحداثيات المفروضة وأنه لهذا المستوى دار
 مركز ox أو oy متصلا بمسوى أفقي معروف أنه مركز ثقل
 سميت الإحداثيات المستأثر بهذه الحركة (الدورانية لهذه المسوى xoy في
 دار ثقله المارئة قسم o (متساو)
 بأخذ العزم مركز المحور x للإحداثيات مساوية لتابع يعظم لمصلحة محله
 نجد أنه:

$$w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n = (w_1 + w_2 + \dots + w_n) \bar{y}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^n w_r y_r}{\sum_{r=1}^n w_r}$$

وبالتالي إذا أخذنا العزم مركز المحور y نجد أنه:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^n w_r x_r}{\sum_{r=1}^n w_r}$$

وهو المطلوب

المسألة:

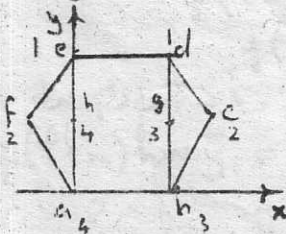
شكل (١١) الجواب

أوجد مركز ثقل سميت به الشكلا المارئة أدناطي 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4

سميت به الشكلا: a, b, c, d, e, f, g, h

سميت الشكلا $abcdef$ حيث g, h نصفنا bd, ae

الن:



لذلك نجد ab مركز الثقل
 c لمركز إليه ae مركز الثقل.

(۱۰۳)

لیکن طول قطع المری یادی $2l$

$$\therefore 20\bar{x} = 6l + 6l + 2l - 2l + 6l$$

$$\bar{x} = \frac{9}{10}l$$

رکزیت یکنه

$$20\bar{y} = 2 \cdot 2l \cos 30^\circ + 3 \cdot 2l \cos 30^\circ + 2 \cdot 2 \cdot 2l \cos 30^\circ + 4 \cdot 2l \cos 30^\circ + 2 \cdot 2l \cos 30^\circ$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l$$

مثال (۱۱)

abcd به شرفه نیه $ab \parallel cd$ یاذا کانت ائوال ab, cd والبعینها لک لا لرتیب l, m, h فایک ایه مرکز نقل به لخرن

$$\frac{1}{3} \frac{l+2m}{l+m} h$$

یعبه به ab سید

المن:

لک به c, d نترک لمریبه

ab و cf, de رنر به

انه دونه رنر لک هه

$$\therefore \text{دونه لک} \quad \frac{1}{2} a\bar{e} h w = aed$$

$$\frac{1}{3} h \quad \text{رید مرکز نقل به } ab \text{ سانه لک}$$

$$\text{دونه لک} \quad m h w = \bar{e} f \cdot h w = defc$$

$$\frac{1}{2} h \quad \text{دکر نقل یعبه به } ab \text{ سانه لک}$$

$$\frac{1}{3} h \quad \text{دکر نقل } \triangle bcf \text{ یعبه به } ab \text{ سانه لک}$$

$$\frac{1}{2} (l - m - a\bar{e}) h w \quad \text{دونه لک سانه لک یادی}$$

$$\frac{1}{2} (l + m) h w = \text{دونه لک لخرن}$$

لک به ایه مرکز نقل یعبه به ab سانه لک $\bar{y}$ ریا فک الفرم مکه ab ندره

$$\frac{1}{2} (l + m) h w \bar{y} = \frac{1}{2} a\bar{e} h w \cdot \frac{1}{3} h + m h w \frac{h}{2} + \frac{1}{2} (l - m - a\bar{e}) h w \cdot \frac{h}{3}$$

مرکز نقل لک لک

لک لک

$$\therefore \bar{y} = \frac{1}{3} \frac{l+2m}{l+m} h$$

مسألة (٣)

مخروط ناقص حيث ننتظم ارتفاعه h ونفرض نظرياً أن a, b حيث $a > b$ فإذا أنزل من مادة المخروط أسطوانة قطرها على مركز المخروط وبأدى مركز المخروط كما نطبقه إحدى تاليفتين مع التاليف الصغيرة للمخروط. فأبقت أنه مركز ثقل المادة الباقية يجب أن يتطابق مع مركز الثقل للمخروط الناقص سابقة ذكرها:

$$\frac{a+3b}{4(a+b)} h$$

الحل:

نوجد أولاً مركز المخروط الناقص
وبعد مركز ثقل المادة الباقية الكبرى de
ونفرض أن w دالة دالة الجرم
سلكه $\frac{b}{a} = \frac{z-h}{z}$

$$\frac{b}{a} = \frac{z-h}{z}$$

$$\therefore z = \frac{a}{a-b} h$$

دالة المخروط ode هو: $\frac{1}{3} \pi a^2 \frac{a}{a-b} h w$
مركز ثقل المادة الباقية de سابقة ذكرها: $\frac{a h}{4(a-b)}$

دالة المخروط ocf هو: $\frac{1}{3} \pi b^2 \frac{b h}{a-b} w$
مركز ثقل المادة الباقية de سابقة ذكرها: $\frac{b h}{4(a-b)} + h = \frac{4ah+3bh}{4(a-b)}$

دالة المخروط الناقص هو: $\frac{1}{3} \pi \frac{a^3-b^3}{a-b} h w$
ونفرض أن مركز ثقل المادة الباقية de سابقة ذكرها y
بأنه العزم حول de يجب أن يكون:

$$\frac{1}{3} \pi \frac{b^3}{a-b} h w \frac{4a-3b}{4(a-b)} h + \frac{1}{3} \pi \frac{a^3-b^3}{a-b} h w y =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \frac{a^4 h^2}{4(a-b)^2} w$$

دست نجه اند:

$$y = \frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{4(a^2 + ab + b^2)} h.$$

دالته توبه دنده، لاسطوانه د مرکز نقطې.
 راضع ته دنده لاسطوانه يادې
 د مرکز نقطې بېرته لپاره de لانه يادې $\frac{1}{2}h$
 دنده لپاره لپاره ته لاسطوانه يادې:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\pi hw(a^2 + ab + b^2) - \pi b^2 hw \\ &= \frac{1}{3}\pi hw(a^2 + ab - 2b^2) \end{aligned}$$

د لاندې ته مرکز نقل د لپاره لپاره يادې ته de لانه $\bar{y}$
 د باندې د لاندې مود de بڼه اند:

$$\begin{aligned} & \pi b^2 hw \frac{h}{2} + \frac{1}{3}\pi hw(a^2 + ab - 2b^2) \bar{y} = \\ &= \frac{1}{3}\pi hw(a^2 + ab + b^2) \frac{a^2 + 2ab + 3b^2}{4(a^2 + ab + b^2)} h. \end{aligned}$$

$$\bar{y}(a^2 + ab - 2b^2) = \frac{(a^2 + 2ab + 3b^2)h}{4} - \frac{3}{2}b^2h$$

$$\begin{aligned} \therefore \bar{y}(a + 2b)(a - b) &= \frac{h}{4}(a^2 + 2ab + 3b^2 - 6b^2) \\ &= \frac{h}{4}(a + 3b)(a - b) \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{a + 3b}{4(a + 2b)} h$$

د لاندې

(7)
(5)

(1.7)

تمارين

- (1) abc مينة تكتبة وزنلي 3 lb.wt. رصفت فيه a, b, c اذناه تدرصا 1b.wt. 2, 2, 11 لا لرتيب. اجب انه مركز نقل المجرة نصف gc مينة g مركز نقل لثقت.
- (2) اذبه مركز نقل مخروط صحت ناقص دائري ارتفاعه 15 cm رصفنا قلبي قائميه 10 cm, 5 cm.
- (3) اسطوانة ومخروط متراكبة في قاعدة واحدة هي بقايف المنة للمخروط. اذبه نسبة ارتفاع المخروط الى ارتفاع الاسطوانة من يقع مركز ثقل الجسم الكلي لانه مركز القاعدة المشتركة.
- (4) مخروط دائري قائم صحت نسبة بينه قلعه وارتفاعه هي 2 : 1. اذبه منه اكبر كره ممكنة. اجب انه مركز ثقل الجزء الباقي منه جسم يلقبه لا مركز ثقل المخروط.
- (5) مخروط دائري اقنونه وله قائم. اجب بنية زاوية لهذا المخروط النصف رأسية بحيث يلقبه مركز ثقله في هذه الحالة لا مركز ثقله. لو كانه صمنا.

Solution: $\frac{5}{3}$

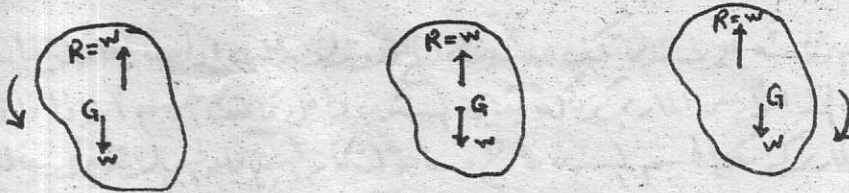
الحل
Trial

$\pi a^2 + \pi a^2$
مع القايمة + مع القايمة المحسوبة

٧ خواص مركز الثقل :

١) إذا ثبتت إحدى نقط جسم جاسي واما هذا الجسم ساكنة فانه النقطة الثابتة مركز ثقل الجسم يجب ان يكونا على استقيم رأسي واحد وذن لو ان الجسم يكون متزاناً تحت تأثير ثدييه هما وزنه ثورياً من مركز ثقله رأسيًا إلى أسفل ودر الثقل منه النقطة الثابتة مع الجسم ويزن في خط عمود لوزنه ودر الثقل يجب ان يكونا على استقامة واحدة . ولما كان خط عمل الوزنه رأسيًا فانه الخط الرأسي المار بمركز ثقل الجسم يجب ان يمر بالنقطة الثابتة .
 رتبته لهذا الشرط في طالبتيه :

أولاً : انه يكون مركز ثقل الجسم لساكنه أسفل النقطة المثبتة وذن هذه الحالة إذا ازيم الجسم إزاحة بسيطة فانه لنزاع الوزنه حول النقطة المثبتة يدور الجسم حولها إلى وضعه الأصلي وحين الإزاحة في هذه الحالة بالوزنه المستقر .
 stable



إزاحة مستقر

ثانياً : انه يكون مركز ثقل الجسم لساكنه أعلى النقطة المثبتة وذن هذه الحالة إذا ازيم الجسم إزاحة بسيطة فانه لنزاع الوزنه حول النقطة المثبتة يدور الجسم حولها سبياً ازدياد الإزاحة فلا يعود الجسم إلى وضعه الأصلي بل يستمر في حركته إلى أنه يسكن في وضع يقع فيه مركز ثقله أسفل النقطة المثبتة وحين الإزاحة إذا لم يزل مركز ثقله أعلى النقطة المثبتة بالوزنه الغير مستقر .
 unstable.



إزاحة غير مستقر

٨ تعاريف :

يقال لجسم إنه في حالة اتزان مستقر إذا أزيح إزاحة بسيطة لموضع اتزانه فعملت القوى المؤثرة فيه على إعادته إلى موضع اتزانه .
 ويقال للجسم إنه في حالة اتزان غير مستقر إذا أزيح إزاحة بسيطة لموضع اتزانه فاصدت القوى المؤثرة فيه على إبعاد الجسم لموضع اتزانه .
 ويقال إنه لجسم في حالة اتزان متعادل neutral إذا أزيح إزاحة بسيطة فلم تمارل القوى المؤثرة فيه إرجاعه إلى موضع اتزانه أو إبعاده عنه أي أنه يستقر في حالة الوضع الجديد أي أنه لقوى المؤثرة على الجسم نقطة تقياسية مركز ثقله كمنه نقطة توازنه في نفسه أي أنه مركز ثقله أو مركز موزون في نفسه على المحور الجانبي .

٩ نظرية :

إذا ارتكز جسم ثقافته على سطح أفقي فثقله في مركز ثقله G ووزنه W فإذا كان مركز ثقله G فوق الرأس المار بمركز ثقله يقال الجسم في حالة اتزان مستقر أما إذا كان مركز ثقله G تحت الرأس المار بمركز ثقله يقال الجسم في حالة اتزان غير مستقر أما إذا كان مركز ثقله G على الرأس المار بمركز ثقله يقال الجسم في حالة اتزان متعادل .



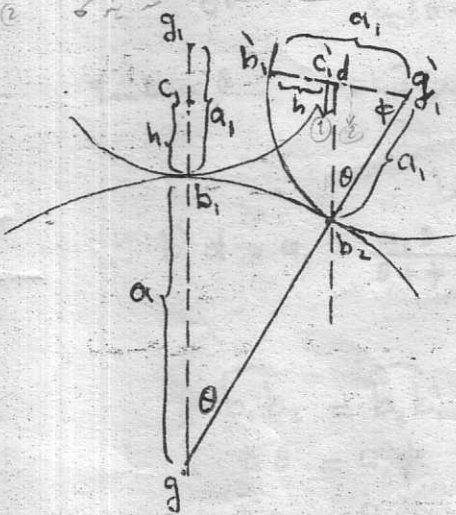
النسبة الموزونة على الجسم هي وزنه W وتؤثر في مركز ثقله G ودراسة القوى عليه فإذا كان الجسم في حالة اتزان مستقر فثقله G فوق الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان غير مستقر فثقله G تحت الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان متعادل فثقله G على الرأس المار بمركز ثقله G .
 وإذا كان الجسم في حالة اتزان مستقر فثقله G فوق الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان غير مستقر فثقله G تحت الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان متعادل فثقله G على الرأس المار بمركز ثقله G .
 وإذا كان الجسم في حالة اتزان مستقر فثقله G فوق الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان غير مستقر فثقله G تحت الرأس المار بمركز ثقله G وإذا كان الجسم في حالة اتزان متعادل فثقله G على الرأس المار بمركز ثقله G .

١٠ البحت من نوع اثنائه صبيبه ساكنيه من صفيه بحيث انه الجزايمه الجبريه
منها كرويه و حفظ مركزها a_1 اذا كانت عشوه الجبريه
تلك لنوع صديقه اي اثنائه.

الانزاع
المنحرفه
تدوير صبيبه وليس انزاع

①

②



نفسه انه نصف نظرا الجزر كروي من حجم لعلوي
بيد a_1 دركزه هو g_1 و مركز ثقل
هو c_1 حيث $c_1 b_1 = h$ (b_1 هي نقطه
تدوير الجزايمه الكرويه في حاله الكره
نفسه انه نصف نظرا الجزر كروي من حجم
المنحرفه a دركزه هو g
الجزايمه الجبريه من صبيبه كرويه
يايه خط المركزي gg_1 يمر بنقطه
التدوير b_1 .

ديانه الجبريه ساكنه

مركز ثقل الجسم لعلوي c_1 يقع على استقيم الرأس المار بنقطه b_1
اي انه c_1 تقع على خط المركزي الرأس gg_1

ولمجرد نوع اثنائه الجسم لعلوي قبل تدوير (انزاع صبيبه) بحيث
تصب نقطه b_1 تدوير الجديت هي b_2 و ياخذ مركزه الموضع g_1 و ياخذ
مركز ثقل الموضع c_1 اما نقطه التدوير الذي تأخذ الموضع b_2

نرسم الرأس المار بنقطه b_2 التدوير الجديت b_2 فيقطع نصف قطر $g_1 b_2$
في نقطه d فاذا وفت c_1 (مركز الثقل للجسم لعلوي في وضعه الجديت)
على ايساره لنقطه d كما ان الانزاع متقرا اما اذا كانت غلي
جديه d كما ان الانزاع غير متقرا.

اي كونه الانزاع متقرا او غير متقرا حسب ما اذا كان $b_1 c_1$
اصغر من او اكبر من $b_1 d$

$$b_1 d = a_1 - g_1 d$$

وكنه :

(١١٠)

کذبت:

$$\frac{g_1 d}{\sin \theta} = \frac{b_2 g_1}{\sin(\theta + \phi)}$$

$$\therefore g_1 d = \frac{\sin \theta}{\sin(\theta + \phi)} a_1 = \frac{\theta}{\theta + \phi} a_1 \quad (1)$$

میانه این الزامه صغیر جدا درجه تکثیر است اعتبار

$$\sin(\theta + \phi) = \theta + \phi$$

لذا θ, ϕ زائده صغیرانه جدا

$$\therefore b_1 d = a_1 - \frac{a_1 \theta}{\theta + \phi} = \frac{a_1 \phi}{\theta + \phi} \quad (2)$$

$\therefore$ جسم تدوج بدو در اوله نیانه:

$$b_1 b_2 = b_2 b_1$$

$$\therefore a \theta = a_1 \phi$$

$$\therefore \theta = \frac{a_1 \phi}{a}$$

$$\therefore b_1 d = \frac{a_1 \phi}{\frac{a_1 \phi}{a} + \phi} = \frac{a a_1}{a + a_1} \quad (4)$$

$\therefore$ بگونه الزامه مستقرا او غیر مستقرا با ازا امانه

$$\frac{a a_1}{a + a_1}$$

انصاف با ازا امانه:

$$\frac{1}{h} \geq \frac{a + a_1}{a a_1}$$

$\therefore$ بگونه الزامه مستقرا ازا امانه:

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}$$

رکیزه الزامه غیر مستقرا ازا امانه:

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}$$

نتيجة (1):

إذا كانه انحناء الجسم السفلي يتجه
إلى الأعلى فإنه:

$$b_1 d_1 b_2 = \phi - \theta$$

$$\therefore b_1 d_1 = b_1 g_1 + g_1 d_1$$

فيكونه التواء غير مستقر إذا كانه:

$$\frac{1}{h} > \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a}$$

فيكونه التواء غير مستقر إذا كانه:

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a}$$

نتيجة (2):

إذا كانه الجسم العلوي يتجه إلى الأسفل فإنه:

$$a_1 = \infty$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} = 0$$

فيكونه التواء مستقر إذا كانه $\frac{1}{h} > \frac{1}{a}$ أي إذا كانه $h < a$

فيكونه التواء غير مستقر إذا كانه $\frac{1}{h} < \frac{1}{a}$ أي إذا كانه $h > a$

نتيجة (3):

إذا كانه الجسم السفلي يتجه إلى الأسفل فإنه $\frac{1}{a} = 0$

فيكونه التواء مستقر إذا كانه $h < a_1$

فيكونه التواء غير مستقر إذا كانه $h > a_1$

نتيجة (4):

إذا كانه الجسم غير مركب يتجه إلى الأعلى فإنه النتائج التي حصلنا عليها صحيحة
باعتبار a_1 نصف قطر الانحناء للجسم العلوي عند نقطة التماس ، a نصف
قطر الانحناء للجسم السفلي عند نقطة التماس .

سؤال (۱۴):

جسم آمیزه یکدیگر سه استوانه استوانه ای l نصف کره ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند. قطر آن a باشد و سطح جسم به طور یکدست h است. فرض کنیم $l < a$ باشد. اگر این جسم را در یک مایع غوطه ور کنیم و آن را در یک مایع غوطه ور کنیم. اگر این جسم را در یک مایع غوطه ور کنیم. اگر این جسم را در یک مایع غوطه ور کنیم.



فرض کنیم h نقطه (نقطه) از این جسم باشد که مرکز ثقل آن باشد.

$$2\pi a l w = \text{وزن استوانه} \quad \text{و مرکز آن } G_1 \text{ است} \quad \text{میتوانیم بنویسیم } G_1 b = \frac{l}{2} + a$$

$$2\pi a^2 w = \text{وزن نیم کره} \quad \text{و مرکز آن } G_2 \text{ است} \quad \text{میتوانیم بنویسیم } G_2 b = \frac{a}{2}$$

$$\pi a^2 w = \text{وزن قطعه (نقطه) } G_3 \text{ است} \quad \text{میتوانیم بنویسیم } G_3 b = l + a$$

$$G_3 b = l + a$$

(فرض کنیم) h نقطه از این جسم باشد که مرکز ثقل آن باشد.

$$2\pi a l w \cdot \left(\frac{l}{2} + a\right) + (2\pi a^2 w) \frac{a}{2} = (2\pi a l + 2\pi a^2) w h_1$$

میتوانیم بنویسیم h_1 به مرکز ثقل جسم استوانه ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند.

$$\therefore h_1 = \frac{a + l}{2}$$

$$\frac{2}{a + l} > \frac{1}{a}$$

میتوانیم بنویسیم استوانه ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند.

$$a > l \quad \text{و مرکز ثقل آن } G_1 \text{ است}$$

(فرض کنیم) h نقطه از این جسم باشد که مرکز ثقل آن باشد.

$$2\pi a l w \left(\frac{l}{2} + a\right) + 2\pi a^2 w \frac{a}{2} + \pi a^2 w (l + a) = (2\pi a l + 2\pi a^2 + \pi a^2) w h_2$$

میتوانیم بنویسیم h_2 به مرکز ثقل جسم استوانه ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند.

$$\therefore h_2 = \frac{(2a^2 + 3al + l^2)}{(l(3a + 2l))}$$

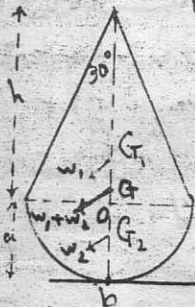
میتوانیم بنویسیم استوانه ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند.

$$\frac{3a + 2l}{2a^2 + 3al + l^2} \geq \frac{1}{a}$$

$$a^2 - al - l^2 \geq 0$$

میتوانیم بنویسیم استوانه ای و نیم کره ای در یک خط مستقیم قرار گرفته اند.

سؤال (٣) :
 دماغ أبيض منتظم يتكون من مخروط ونصف كرة معاً في القاع فإذا ارتكز
 الدماغ على سطح أفقي إلى مستوى أفق حركته وطلعت زاوية رأس المخروط
 سادس $\frac{\pi}{3}$ ثابته أنه اتزان الدماغ غير مستقر.
 الحل :



نقصه أنه منتظم يتكون الدماغ من مخروط ونصف كروي
 وأنه نصف قطر الكفة a ، ارتفاع المخروط هو h
 وأنه مركز ثقل نصف الكرة G_1 مركز ثقل المخروط هو G_2
 ولكنه w وزنه دماغ المصاحبة
 وأنه مركز ثقل الدماغ هو G

ويبعد عن الأساس منه b مائة y
 $\therefore$ وزنه نصف الكرة هو $w_2 = 2\pi a^2 w$ ويبعد عنه b مائة $\frac{a}{2}$
 $\therefore$ وزنه المخروط (مخروط) هو $w_1 = \pi a l w$ ويبعد عنه b مائة
 منها $(a + \frac{h}{3})$ حيث l طول رأس المخروط.

$$w_1 + w_2 = 2\pi a^2 w + \pi a l w = \text{وزنه الدماغ}$$

بأخذ العزم حول النقطة المماسية لـ b نجد أنه :

$$2\pi a^2 w \frac{a}{2} + \pi a l w (a + \frac{h}{3}) = (2\pi a^2 + \pi a l) w y$$

$$a^3 + 2a \cdot a \cdot (a + \frac{h}{3}) = (2a^2 + 2a^2) y$$

$$a + 2a + \frac{2\sqrt{3}a}{3} = 4y$$

$$[l = 2a, h = a\sqrt{3}]$$

$$3a + 2a\sqrt{3}/3 = 4y$$

$$\therefore y = \frac{3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} a$$

$$\therefore \frac{1}{y} = \frac{4}{3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{12}{9 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{12}{12.4} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{y} < \frac{1}{a}$$

$$(\sqrt{3} = 1.7)$$

ضعف الحبيب

$\therefore$ اتزان الدماغ غير مستقر

(111)

ثالثاً للامواج الجوفاء

وزن الكرة هو $4\pi a^2 w$

الخطوط الجوفاء $\pi a^2 w$

السطح $2\pi a w$

عوضاً
عنه
 $\frac{a}{2}$



عوضاً عنه
تكملاً $\frac{a}{2}$

تكملاً $\frac{a}{2}$

نلاحظ

$$\frac{1}{a} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \frac{a}{a} = \frac{1}{2} \frac{a}{a} = \frac{1}{2}$$

(4.1.3)

$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

١٢ مركز ثقل جسم متجانس

لذلك:

نقسم الجسم إلى عناصر صغيرة ونكتب أبعادها ونكتب مركزها Δw ونقسمها إلى
نركز عنده النقطة (x, y)
فإذا كانت $(\bar{x}, \bar{y})$ هما إحداثيات مركز ثقل الجسم فما سببه يكون:

$$\bar{x} = \frac{\sum \Delta w x}{\sum \Delta w}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \Delta w y}{\sum \Delta w}$$

حيث يسجل الجبرج جميع عناصر الجسم
لذلك يمكنه تعيين النتيجة السابقة برؤية التكامل لأنه عدد العناصر $\rightarrow \infty$

$$\bar{x} = \frac{\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \sum \Delta w x}{\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \sum \Delta w} = \frac{\int x dw}{\int dw}$$

$$\bar{y} = \frac{\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \sum \Delta w y}{\lim_{\Delta w \rightarrow 0} \sum \Delta w} = \frac{\int y dw}{\int dw}$$

١٣ مركز ثقل قوس $y = f(x)$

لكنه الخطية أي مركز ثقل القوس ab .

لذلك نقسم القوس إلى عناصر متناهية

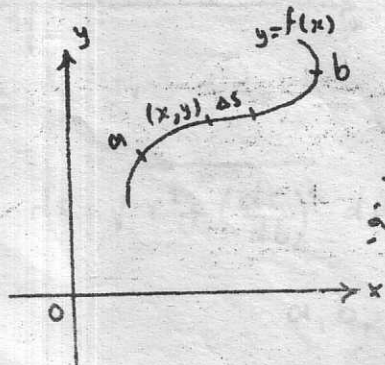
في الشكل طول كل عنصر Δs فإذا آلت Δs إلى الصفر

أصبح القوس ab كونا به عدد لانه في Δs متناهية

فإذا كانت w وزنه و Δs دمه المماس

فانه وزنه العنصر $\Delta s \cdot w$

مركز ثقل العنصر (x, y)



(۱۱۷)

فإذا كانت المنطقة $(\bar{x}, \bar{y})$ هي مركز ثقل التوس ab فإنه:

$$\bar{x} = \frac{\int w x ds}{\int w ds},$$

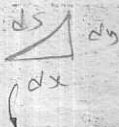
$$\bar{y} = \frac{\int w y ds}{\int w ds}$$

وتؤخذ حدود التكامل بحيث تشمل طول التوس ab

ويلاحظ أنه:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$



نتيجة:

ليدار مركز ثقل التوس a, b من حيث $r = \varphi(\theta)$

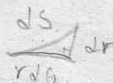
فإنه بعد تقسيم إلى عناصر صغيرة:

دونه عنصر $w ds$

مركز ثقله هو: $(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int w r \cos \theta ds}{\int w ds}$$

$$\bar{y} = \frac{\int w r \sin \theta ds}{\int w ds}$$



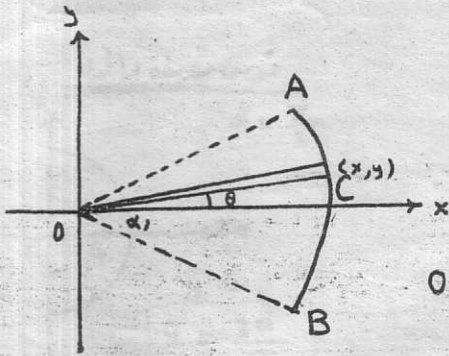
$$(ds)^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta ; ds = \sqrt{1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr$$

حيث:

وتؤخذ حدود التكامل بحيث تشمل طول التوس a, b

(مسألة) مركز ثقل قوس دائرية منتظمة :



نفهم أنه AB قوس من دائرة
مركزها O نصف طولها α راس
لهذا القوس يقابل زاوية مركزية مقدارها 2α
نصف القوس AB في C ثم نكتب
OC محور السينات وبعدها إليه
محور الصادات.

∴ OC محور تماثل للقوس AB

∴ مركز ثقل القوس AB يقع على OC

$$\therefore \bar{y} = 0$$

بتقسيم القوس إلى عناصر متناهية في الصغر نجد أنه نتائج البنية
الساكنة أنه :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\int y \, ds}{\int ds} \quad \bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds}$$

حيث w دالة كثافة الخط (الخط) من القوس

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r \cos \theta \cdot r \, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} r \, d\theta}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

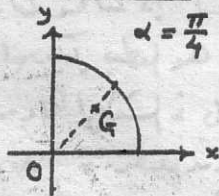
∴ مركز ثقل القوس AB هو نقطة $\left(\frac{r \sin \alpha}{\alpha}, 0 \right)$

أي أنه مركز ثقل قوس دائرية منتظمة زاوية المركز 2α يقع على

الخط المار بمركز دائرة القوس إلى منتصفه ويبعد عن هذا
المركز مسافة مقدارها $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ حيث α نصف طول الدائرة.

حالت خاصة :

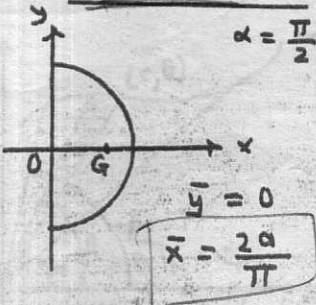
توس ربع دائري



$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$$

توس نصف دائري

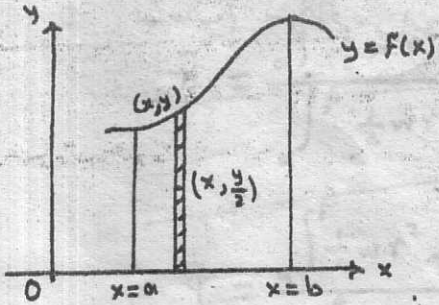
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



مركز ثقل مساحة مستوية :

١٤

لكية المطلوب هو إيجاد مركز ثقل المساحة المحددة بالمنحنى $y = f(x)$ ومحدودتين $x = a$ و $x = b$ ولتكن :



نقسم هذه المساحة إلى شرائح سمكها Δx في المحور السيني للمحور x ولكل إحداثياتها x في المحور السيني x و y في المحور y $y = f(x)$ $\Delta x \cdot w$ $y \Delta x \cdot w$ (إشعاعية) $y \Delta x \cdot w$ $y \Delta x \cdot w$

في w كتلة وحدة المساحة.

مركز ثقل العنصر هو النقطه $(x, \frac{y}{2})$

فإذا كان مركز ثقل المساحة المذكورة هو النقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ فإن :

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b w y x dx}{\int_a^b w y dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b w y \frac{y}{2} dx}{\int_a^b w y dx}$$

نسيجه

نسيجه

$$\theta = \beta, \theta = \alpha$$

لوجد مركز ثقل المادة المحددة بالمنحنى $r = \varphi(\theta)$ بين

نقسم المادة إلى عناصر صغرى متساوية
مركزها هو نقطة وتكون أبعادها هو
المطلوب في الشكل البارد.

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta \theta \cdot w = \text{وزن العنصر}$$

$$\left(\frac{2}{3} r \cos \theta, \frac{2}{3} r \sin \theta \right) \text{ مركز ثقل العنصر}$$

حيث w كثافة المادة.

نأخذ الآن $(\bar{x}, \bar{y})$ هو مركز ثقل المادة بأكملها:

$$\bar{x} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} w r^2 \cdot \frac{2}{3} r \cos \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} w r^2 d\theta};$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} w r^2 \cdot \frac{2}{3} r \sin \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} w r^2 d\theta}.$$

مثال (١١):

أوجد مركز ثقل المادة المحددة بالمنحنى $y^2 = 4x$ والحدود $y=0$ و $y=1$

$$y=0, y=1$$

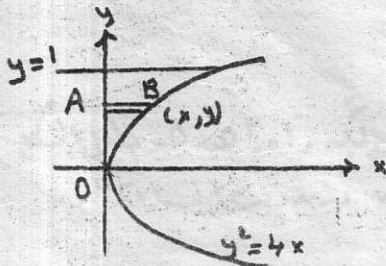
الحل:

نقسم المادة إلى عناصر صغرى متساوية
نظير توازن الحدود بين وتكون AB
أبعادها (العناصر).

$$x \Delta y w = \text{وزن العنصر}$$

$$\left(\frac{x}{2}, y \right) \text{ مركز ثقل العنصر}$$

حيث w كثافة المادة.



مسئله شماره

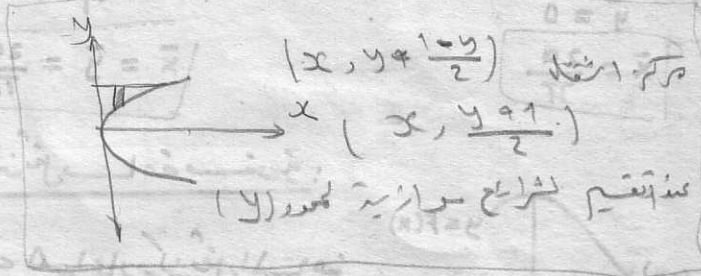
مسئله شماره

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$



مسئله شماره

$$\frac{\pi}{2} = \theta$$



31

مسئله شماره

مسئله شماره

$$d = x, \quad \theta = x$$

مسئله شماره

مسئله شماره

مسئله شماره

$$w = x \sin \theta$$

مسئله شماره

$$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w} \right)$$

$$\left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w} \right)$$

$$y = \sqrt{1 - \sin^2(\theta - 1)}$$

$$\frac{x \sin \theta}{x \sin \theta} = x$$

$$\frac{x \sin \theta}{x \sin \theta} = \bar{x}$$

(۱۴۱)

نیاز داریم $(\bar{x}, \bar{y})$ مرکز ثقل المماسه فانه:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 w x \cdot \frac{x}{2} dy}{\int_0^1 w x dy} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^4}{16} dy}{\int_0^1 \frac{1}{4} y^2 dy} = \frac{3}{40}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 w x y dy}{\int_0^1 w x dy} = \frac{\int_0^1 \frac{y^3}{4} dy}{\int_0^1 \frac{1}{4} y^2 dy} = \frac{3}{4}$$

مثال (۱۴)

آرد مرکز ثقل قطاع دائري منتظم:

لذلك:

نفرصه OAB قطاع سه دائره مركزها O

دقيقت قطرها α وانه يقابل زاوية

مركزية 2α منه المركز.

تتقن القوس AB في C ثم ننسب

OC سورا الاضلاع ولهمودراليه سه O

سورا للمصادر

$\therefore OC$ سورا نمائش للقطاع AOB

$$\therefore \bar{y} = 0$$

حيث $(\bar{x}, \bar{y})$ هو مركز ثقل القطاع AOB

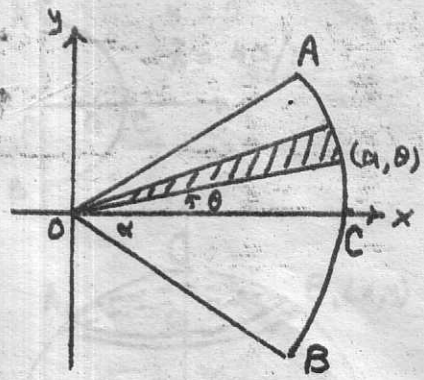
اذا سمنا القطاع الى قطعتين متساويتين في (الصفر) لكنه اماها هو الخليل بالكل

$\therefore$ دونه انفسر $\frac{1}{2} \alpha^2 \sin \theta$ حيث w دونه دونه المماسه.

و مركز ثقل هو النقطة:

$$\left(\frac{2}{3} \alpha \cos \theta, \frac{2}{3} \alpha \sin \theta \right)$$

و هو نفس يكون:



(١٢٢)

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} w a^2 \cdot \frac{2}{3} a \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} w a^2 d\theta}$$

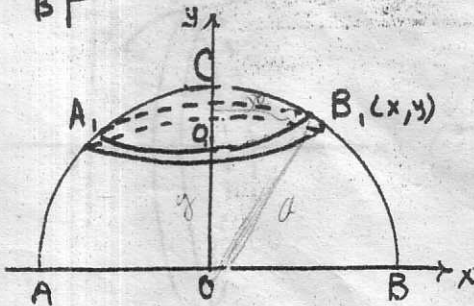
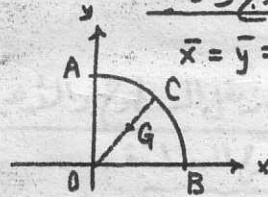
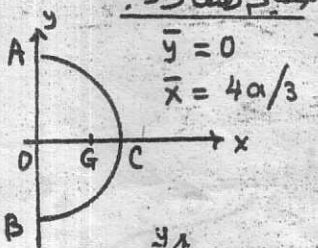
$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3} \frac{a \sin \alpha}{\alpha}$$

أي أنه مركز ثقل قطاع دائري زاوية المركز 2α يقع على امتداد الوتر
من مركز الدائرة إلى منتصف الوتر ويبعد عن مركز القطاع مسافة
تساوي $\frac{2}{3} \frac{a \sin \alpha}{\alpha}$ حيث α نصف قطر دائرة القطاع.

حالة خاصة:

منطقة ربع دائرية

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$$



$$a^2 = x^2 + y^2$$

19 مركز ثقل نصف دائرة منتظمة.

لذلك:

نفرسه أنه ACB قطع عمود على الوتر
المستوية نصف الكون مارا بالمركز.
 $\therefore AB$ قطر O المركز.

α نصف القطر w وزنه وحدة الحجم.
 $\therefore C$ إلى نقطة على المحور يكون.

$$OC \perp AB$$

ثم نقسم الكون إلى عناصر بياض له ارتفاع متساوية للارتفاع المستوية وسنكسر
تساوي في الصغر ويكون O مركز زواياها. ونختار لها مركزا في الشكل.

(١٢٣)

لكنه النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ هي مركز ثقل نصف الكرة .
 راضع انه مراكز انتقال جميع العناصر (الذرات) تقع على Oy
 $\therefore$ مركز ثقل نصف الكرة يقع على Oy

$$\bar{x} = 0$$

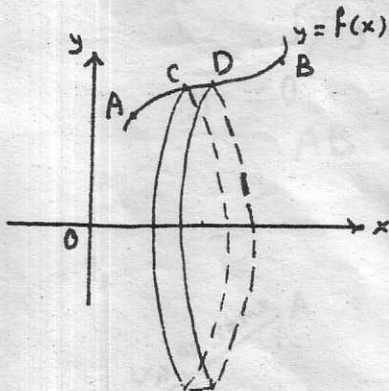
دوره العنصر = $\frac{\pi x^2 \Delta y \omega}{x^2 + y^2 = a^2}$ مركز ثقله هو النقطة $(0, y)$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \pi x^2 \omega y dy}{\int_0^a \pi x^2 \omega dy} = \frac{\int_0^a y(a^2 - y^2) dy}{\int_0^a (a^2 - y^2) dy}$$

$\frac{1}{4} a^4 - \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} a^4 (2/3) \cdot \frac{3}{2}$
 $\frac{1}{4} a^4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8} a^4$
 $\frac{2}{3} a^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} a^3$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3}{8} a.$$

١٦ مركز ثقل الطول والذباب الدورية :

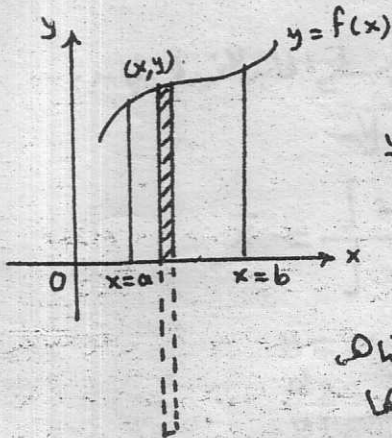


إذا دار القوس AB حول نقطة $y = f(x)$
 حول محور السينات دورة كاملة وقسمت
 القوس إلى عناصر طولية متناهية في الصغر
 مثل CD فإِنَّ مساحة سطح الناتج (دائرة)
 دورانه لعنصر CD ($= ds$) حول محور
 السينات دورة كاملة تساوي $2\pi y \Delta s$
 مركز ثقله هو النقطة $(x, 0)$
 بإذن P مركز ثقل الجسم الناتج هو

$$\bar{x} = \frac{\int 2\pi y x ds}{\int 2\pi y ds} = \frac{\int y x ds}{\int y ds} ;$$

$$\bar{y} = 0$$

وتُعرف هذه الحالة بمبدأ ثقل القوس AB

كثافة الجسيم الدوراني :

إذا دارت المساحة المحيطة بين المنحنى $y = f(x)$ والمستقيم $x = a$ ، $x = b$ حول المحور السيني فإنه ليتمركز ثقل الجسم الدوراني الناشئ من تقسيم المساحة المذكورة إلى شرائح سكرية متناهية الصغر لمدونية للمحاور السينيات ولتلكه اعدادها صم لظلمة بالشكل .

∴ الجسم الناشئ منه دوراناً له ثقل مركزي $\pi y^2 \Delta x$ مركز ثقله $(\bar{x}, 0)$ فإذا كانت $(\bar{x}, \bar{y})$ هي مركز ثقل الجسم لدرجة أفقية فإنه : (w) وزنه وبعده عن المحور

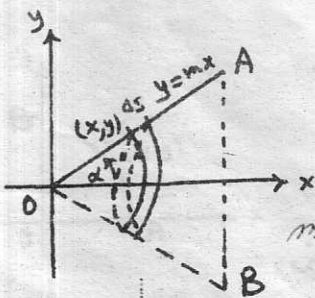
$$\bar{x} = \frac{\int \pi y^2 w x \, dx}{\int \pi y^2 w \, dx} = \frac{\int_a^b y^2 x \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx}$$

$$\bar{y} = 0$$

وإذا أخذ محور إحداثي بحيث تمثل النسي AB

مثال (١١) :

أوجد مركز ثقل السطح الجانبي للخرطوم أعرض ارتفاعه h



الكل :
لكنه زاوية رأس الخرطوم هي 2α
∴ السطح الجانبي للخرطوم المكون يتكون من

ناشئة دوراناً مستقيم $y = mx$ حيث $m = \frac{y}{x} = \tan \alpha$ حول محور السينيات

دورته كاملة من $x = 0$ إلى $x = h$

فإذا قسم السطح OA إلى عناصر طولية كل منها Δs كما في الشكل فإنه وزنه العنصر الدوراني $2\pi y \Delta s w$ مركز ثقله $(x, 0)$ حيث w وزنه وبعده المساحة .

(١٢٥)

نأذا كانت البنية $(\bar{x}, \bar{y})$ هي مركز ثقل سطح الجانب المنزود فإنه:

$$\bar{y} = 0 ;$$

$$\bar{x} = \frac{\int 2\pi y w x ds}{\int 2\pi y w ds} = \frac{\int y x ds}{\int y ds}$$

$$y = mx$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = m$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + m^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sec \alpha$$

$$\therefore ds = \sec \alpha dx$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^h m x^2 \sec \alpha dx}{\int_0^h m x \cdot \sec \alpha dx} = \frac{\frac{1}{3} h^3}{\frac{1}{2} h^2} = \frac{2}{3} h$$

أي أنه مركز ثقل السطح الجانب المنزود يقع على محور x ويبعد عن الرأس A بقدر $\frac{2}{3} h$ حيث h ارتفاع المنزود. (كما سبق)

مثال (٢):
أوجد مركز ثقل السطح المنحني نصف كرة منتظم الجوانب

الحل:

نفرصه أنه نصف كرة الجوانب منتظمة دوران ربع الدائرة AB $(x^2 + y^2 = a^2)$ نصف دائرة a والعمود x الربع الأول (x, y) كامله مولد المنحني. فإذا كان ds هو عنصر طولي من المنحني AB فإنه:

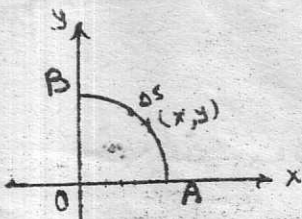
$$ds = \text{العنصر الدوارفي} = 2\pi y \Delta s w$$

مركز ثقل $(x, 0)$

حيث w دالة كثافة السطح.

نأذا كانت $(\bar{x}, \bar{y})$ هي مركز ثقل السطح المنحني فإنه:

$$\bar{y} = 0$$



(١٤٦)

$$\bar{x} = \frac{\int 2\pi y w x ds}{\int 2\pi y w ds} = \frac{\int x y ds}{\int y ds}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{نكه}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

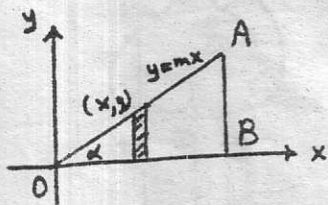
$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{a}{y}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^a x y \frac{a}{y} dx}{\int_0^a y \frac{a}{y} dx} = \frac{\int_0^a x dx}{\int_0^a dx} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{a} = \frac{1}{2} a$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{1}{2} a ; \bar{y} = 0$$

مثال (٣):

أوجد مركز ثقل مخروط دائري قائم صمته ارتفاعه h
الحل:



نكه 2α هي زاوية رأس المخروط
يمكن اعتبار المخروط ناتجاً من دوران المثلث
المحدود بالخط $y = mx$ (حيث $m = \tan \alpha$)
ودور x والارتفاع $x = h$ حول المحور yz
دور كامل.

نإذا قسمنا المثلث OAB إلى عناصر ماصية بقائمة تطبيق
شكل متناهية الصغر موازية للمحور yz نأخذ:

دور عنصر الدوران $\pi y^2 \Delta x w$ حيث w دونه دور الحجم
مركز ثقله هو النقطة $(x, 0)$

نإذا المثلث مركز ثقل المخروط هو النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ نأخذ:

$$\bar{y} = 0 ;$$

(1٢٧)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi y^2 w x dx}{\int_0^h \pi y^2 w dx} = \frac{\int_0^h m^2 x^3 dx}{\int_0^h m^2 x^2 dx}$$

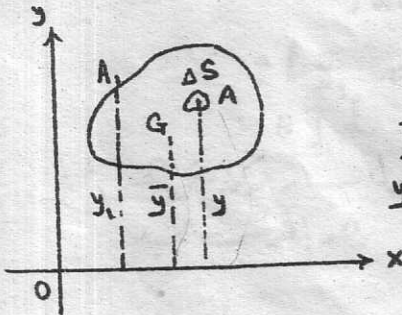
$$\therefore \bar{x} = \frac{3}{4} h$$

أي أنه مركز ثقل الخروط الدائري لقائم المسمت يقع على محور y ويبعد
عنه رأسه مسافة قدرها $\frac{3}{4} h$
أربعياً أخرى بناءً على مركز ثقل الخروط الدائري لقائم المسمت يقع على محور x
ويتسم نسبة ١ سهجاً لقائم إلى 3 سهجاً الرأس.

Pappus theorems.

١٧) نظريتا بابوس :

إذا دارت مسافة متدية حول محور في مسطح في زاوية فإنه:
(أولاً) حجم الجسم الدوراني = المساحة $\times$ طول مسار مركز ثقل المساحة
(ثانياً) مسافة سطح الدوراني = محيط المساحة $\times$ طول مسار مركز ثقل هذا المحيط
البرهان:



(أولاً) نعتبر محور الدوران هو المحور y
ولنفرض أنه المساحة هي S وأنه يقع
مركز ثقله G على محور الدوران Ox فهو $\bar{y}$
نأخذ أي نقطة من المساحة مثل A ليلعب y
محور الدوران فإذا كانت θ هي زاوية
الدوران فإنه طول القوس التي تقطعها
النقطة A يادي $y\theta$

$\therefore$ الجسم الناتج من دورانه لنفرض المساحة dS عند A هو $y\theta dS$

$$\therefore \text{حجم الجسم الدوراني} = \int y\theta dS$$

$$= \theta \int y dS$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dS}{\int dS}$$

$$\therefore \bar{y} S = \int y dS$$

وكذلك

∴ حجم الجسم الدوراني = $\theta \bar{y} S$

= المساحة $\times$ طول مسار مركز ثقل هذه المساحة

وهو المحيطة بالزاوية θ

(ثانياً) ننظره أنه طول سبيط المساحة المتحركة هو l وأنه بعد مركز ثقل السبيط

بمسافة الدوران هو $\bar{y}_1$

ثم نأخذ المساحة المنتظمة من المحيط مثل A_1 على بعد y_1 من محور الدوران Ox ويكون زاوية الدوران هي θ

∴ طول القوس التي تقطعها A_1 هو $y_1 \theta$

∴ المساحة الناتجة من دوران عنصر المحيط (ds) هي $y_1 \theta ds = A_1$

∴ المساحة الكلية الدوراني كل = $\int y_1 \theta ds$

$$= \theta \int y_1 ds$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\int y_1 ds}{\int ds} = \frac{\int y_1 ds}{l}$$

وبذلك

∴ المساحة الكلية الدوراني كل = $\theta l \bar{y}_1$

$$\theta \bar{y}_1 l =$$

= طول السبيط $\times$ طول مسار مركز ثقل هذه المساحة

وهو المحيطة بالزاوية θ

مسألة (١١) :

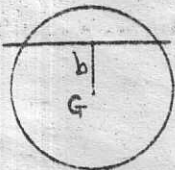
أوجد حجم الجسم الدوراني ومساحة سطح الدوراني الناتجة من دوران راحة نصف دائرة oa حول محور في مستوى يمسها مركزها a مسافة b منها b

الحل :

بتطبيق نظرية بايوس نجد أنه :

$$\pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b \quad \text{حجم الجسم الدوراني هو}$$

$$2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab \quad \text{مساحة سطح الدوراني هو}$$



(١٤٩)

سأله (ب) :

استخدم نظريتي بابرسي في ايجاد :

و ارسا مركز ثقل نصف دائرة .

(أانيا) مركز ثقل قوس متطوع لا هئية نصف دائرة .

الحل :

لأوجد الحجم الدوراني لهذا قوس دوران نصف دائرة

دورة كاملة حول مركزها هو كرة ربع

دورة باستخدام نظرية بابرسي فانه :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{1}{2}\pi a^2 \cdot 2\pi \bar{y}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$$

(أانيا) السطح الناتج من دوران قوس لا هئية نصف دائرة

دورة كاملة حول مركز الدائرة هو كرة مبدونة ربع

بأستخدام نظرية بابرسي يكونه :

$$4\pi a^2 = \pi a^2 \cdot 2\pi \bar{y}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$$

دعنا كلنا نرضينا أنه مركز الثقل يقع لا نصف القطر العمودي على القطر

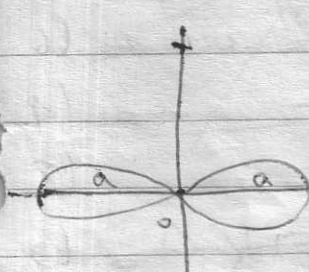
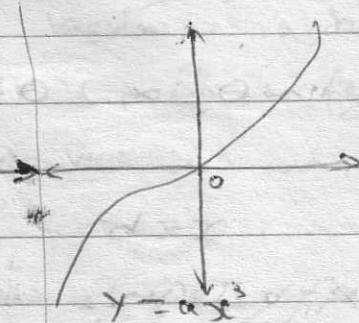
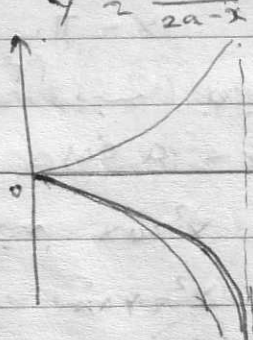
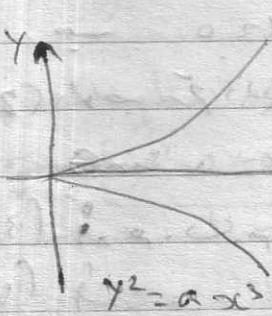
العمود لنصف الدائرة وذلك من التماثل .



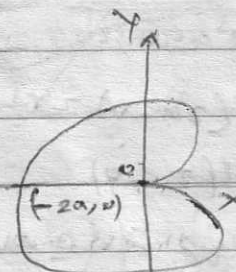
(21)
(10/)

المعادلة في القطب (11)

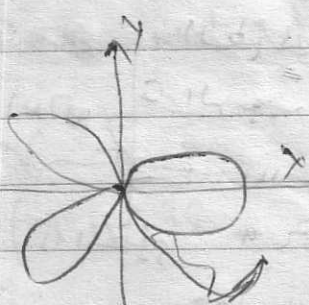
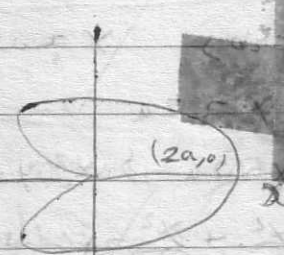
$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$



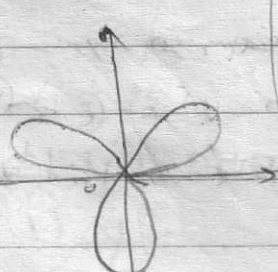
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$



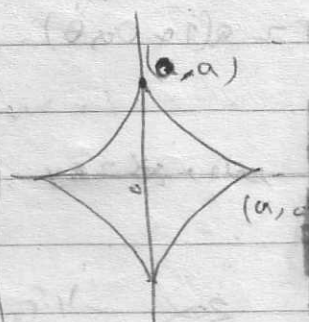
$$r = 2a(1 - \cos \theta), \quad r = 2a(1 + \cos \theta)$$



$$r = 2a \cos 3\theta$$



$$r = 2a \sin 3\theta$$



$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = \frac{a^2}{3}$$

1 2 3 4

(4) أريد معرفة تقاطع المنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ في الربع الثاني

 $x = \pi, x = 0$

(2) اوصي مركز القدس المحمدي بـ (م) رة (أ - أ) من المدة

$$x = a \cos \theta \quad y = a \sin \theta$$
$$x=b \quad \vee \quad x^2-ax \approx p.p.t.p.i. \quad (3)$$
 $x^2 \circ y^2 \circ y^{2yax} \rightarrow Cu$
$$x^2 + y^2 = 4ax \quad \text{---} \quad y^2 + 4ax = x^2 \quad (5)$$
$$x \approx 0 \quad \} \quad x^3 \approx ay^2 \quad \text{---} \quad (6)$$
$$y = 2a - x \quad \Rightarrow \quad y^2(2a-x) = x^3 \quad (1)$$
$$x^2 - 2a \geq x^2 y \quad 2 \quad 4a^2(2a - y) \quad \text{--- (8)}$$

الخارجية من المثلث الأمامي الزاوية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$ (9)

X may follow case) $\rightarrow$

$$x^2 y' = \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \quad (4)$$
 ~~$r = a(1 + 0.05\theta)$ where θ is the angle in radians. (12)~~

الوقت ٥ الرقيب ١١ ج ١٢ مر ١٣ محرز

(13) ————— اسم المفعول المجرى بالرفع

۴۲۹

(۶۶) قطره‌ای از آب در دهانه a از لوله a به سمت a می‌ریزد.

اوليات الكتابه ~~الاصليه~~ واساميه من اختلفت كتابه
هذه، نقدها ~~في~~ ~~الكتاب~~ ~~الاصلي~~

$n \geq 1$ لا بد من
الخطوة الأولى

Sec. Alg"

mathematical induction

$1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

$n \geq 1$ لنثبت أولاً
أنه صحيح لـ $n=1$

نريد إثباته

نأخذ $n = k$ ونثبت أنه صحيح

(I) $1 + 2 + 3 + \dots + (2k-1) = k^2$

فرضاً $n = k+1$

$1 + 2 + 3 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$ R.H.S

L.H.S = $k^2 + 2k + 1$ (I) + (2k+1)

OR $I + (2k+1) = (k^2 + 2k + 1) = (k+1)^2$ (II)

$\forall n \geq 1$ نثبت أنه صحيح

$2 \times 2^2 + \dots + n^2 = 2(2^n - 1) \quad \forall n \geq 1$

$2 \times 2^2 + \dots + 2^n = 2(2^n - 1)$ نأخذ $n \geq 1$

L.H.S $2^1 = 2 =$ R.H.S $2(2^1 - 1) = 2$ (1)

$n = 1$ نثبت أنه صحيح (2)

$n = k$ نثبت أنه صحيح (2)

$n = k+1$ نثبت أنه صحيح